Université de Lorraine **Examen 2019-2020**

EDP Elliptiques – ANTOINE LEMENANT **M2 - MFA**

Exercice 1

Pour tout $x]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \arctan(nx)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,1}(]-1,1[)$.

Corrigé : Pour tout n la fonction $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc en particulier puisque $]-1,1[$ est borné on a $f_n \in W^{1,1}(]-1,1[)$. Majorons maintenant sa norme. On a $\|f_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$ donc en particulier $\|f_n\|_{L^1(]-1,1[)} \leq \pi$. D'autre part un calcul montre que $f_n' = \frac{n}{1+(nx)^2} \geq 0$ donc $|f_n'| = f_n'$ et

$$\|f'\|_{L^1(]-1,1[)} = \int_{-1}^{1} \frac{n}{1+(nx)^2}dx = \arctan(n) - \arctan(-n) \leq \pi.$$

En d'autre termes nous avons montré que

$$\|f_n\|_{W^{1,1}(]-1,1[)} = \|f_n\|_1 + \|f_n'\|_1 \leq 2\pi,$$

et la suite (f_n) est bien bornée dans $W^{1,1}(]-1,1[)$.

2. Montrer que f_n converge dans $\mathcal{D}'([-1,1])$ vers une fonction $f \in L^1(]-1,1[)$ à identifier.

Corrigé : On remarque que f_n converge presque partout vers la fonction discontinue $f = -\frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{]-1,0[} + \frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{]0,1[}$. En utilisant le théorème de converge dominée on en déduit que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]-1,1[)$ on $\int_{]-1,1[} f_n\varphi dx \to \int_{]-1,1[} f\varphi dx$ et donc f_n converge vers f dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$.

3. Calculer f' dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$ et en déduire que f n'appartient pas à $W^{1,1}(]-1,1[)$.

Corrigé : Soit $\varphi \in C_c^\infty(]-1,1[)$. Alors

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{]-1,1[} f\varphi' dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{0} \varphi' dx - \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1} \varphi' dx = \frac{\pi}{2}\varphi(0) + \frac{\pi}{2}\varphi(0) = \pi\ \varphi(0).$$

En en déduit que $f' = \pi\ \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$. La mesure de Dirac n'était pas représentable par une fonction L^1, on en déduit que f n'appartient pas à l'espace $W^{1,1}(]-1,1[)$.

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 et $g \in L^2(\Omega)$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ on note $|x|$ la norme euclidienne i.e. $|x|^2 := \sum_{i=1}^N (x_i)^2$. Pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on pose

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega (u-g)^2 \, dx.$$

1. Montrer que $t \mapsto (t-a)^2$ (pour $a \in \mathbb{R}$) est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est convexe.

Corrigé : La fonction $t \mapsto (t-a)^2$ (pour $a \in \mathbb{R}$) est C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde vaut $2 \geq 0$. On en déduit que pour tout a fixé, la fonction $t \mapsto (t-a)^2$ est convexe. En particulier, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, pour tout x fixé, et pour tout $s \in (0,1)$ on a l'inégalité

$$\Big(su(x) + (1-s)v(x) - g(x)\Big)^2 \leq s\Big(u(x) - g(x)\Big)^2 + (1-s)\Big(v(x) - g(x)\Big)^2.$$

En intégrant cette inégalité pour $x \in \Omega$, on trouve

$$\int_\Omega (su(x) + (1,s)v(x) - g(x))^2 \, dx \leq s \int_\Omega (u(x) - g(x))^2 + (1-s) \int_\Omega (v(x) - g(x))^2 \, dx.$$

Par ailleurs pour $a = 0$ la fonction $t \mapsto t^2$ est convexe. On en déduit donc par un raisonnement analogue que, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\int_\Omega (\partial_i (su + (1-s)v))^2 \, dx \leq s \int_\Omega (\partial_i u)^2 \, dx + (1-s) \int_\Omega (\partial_i v)^2 \, dx.$$

donc en sommant sur i,

$$\int_\Omega |\nabla (su + (1-s)v)|^2 \, dx \leq s \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + (1-s) \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

Somme toute, nous avons démontré que

$$J(su + (1-s)v) \leq sJ(u) + (1-s)J(v),$$

et donc J est convexe.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisante pour J, c'est à dire telle que $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J$. Montrer que (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$ à partir d'un certain rang.

Corrigé : Déjà on peut remarquer que J est minorée par 0 donc l'infimum existe et est un nombre positif. Soit $m = \inf J$ et soit (u_n) une suite minimisante. Alors il existe n_0 tel que $J(u_n) \leq m+1$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier,

$$\forall n \geq n_0, \qquad \int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx \leq J(u_n) \leq m+1.$$

Par ailleurs, puisque Ω est un ouvert borné, d'après l'inégalité de Poincaré il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega v^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx,$$

pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$. On en déduit donc finalement que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \|u_n\|_{H^1}^2 = \|u_n\|_2^2 + \|\nabla u_n\|_2^2 \leq (1+C)(m+1).$$

3. Montrer que J admet un minimiseur. C'est à dire qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$J(u) = \min_{H_0^1(\Omega)} J.$$

Corrigé : Soit (u_n) la suite minimisante bornée trouvée à la question précédente. Par compacitié faible (théorème de Banach-Alaoglu et le fait que $H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert, donc reflexif), il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ une sous-suite telle que $u_{n_k} \to u$ faiblement dans H^1. Or J étant convexe, elle est semi-continue inférieurement pour la convergence faible. On en déduit donc

$$m \leq J(u) \leq \liminf J(u_n) = m,$$

et u est un minimiseur pour J.

4. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En développant $J(u+t\varphi)$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi\, dx = 0.$$

Corrigé : Puisque $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, la fonction $u + t\varphi \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'une part on trouve

$$\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + t^2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

D'autre part on a

$$\int_\Omega (u + t\varphi - g)^2 \, dx = \int_\Omega (u-g)^2 \, dx + 2t \int_\Omega (u-g)\varphi + t^2 \int_\Omega \varphi^2 \, dx.$$

Donc finalement,

$$J(u+t\varphi) = J(u) + 2t \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi \, dx \right) + t^2 \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx + \int_\Omega \varphi^2 \, dx \right).$$

Comme u est minimiseur on en déduit que $J(u) \leq J(u+t\varphi)$ soit

$$0 \leq 2t \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi \, dx \right) + t^2 \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx + \int_\Omega \varphi^2 \, dx \right).$$

En divisant par $t > 0$ puis en faisant $t \to 0$ on trouve

$$0 \leq 2 \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi \, dx \right).$$

Puis, quitte à changer φ en $-\varphi$ on trouve l'inégalité inverse ce qui montre donc bien que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi \, dx = 0.$$

5. En utilisant un résultat vu en cours, montrer que $u \in H^2(\Omega)$.

Corrigé : L'égalité
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} (u-g)\varphi \, dx = 0$$
étant vérifiée pour toute fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, on en déduit que la fonction u est solution faible du problème de Dirichlet homogène
$$\begin{cases} -\Delta u = g - u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
Puisque le second membre $g - u \in L^2(\Omega)$, et que Ω est un ouvert borné de classe C^2, on en déduit d'après le résultat de régularité vu en cours que $u \in H^2(\Omega)$.

Problème

Dans ce problème on souhaite étudier l'équation non linéaire suivante, pour $q > 1$:
$$\Delta u = |u|^q. \tag{1}$$
En particulier nous allons démontrer le résultat frappant suivant :

Théorème : Il existe $q(N) > 1$ tel que si $1 < q < q(N)$ alors toute solution $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant (1) au sens des distributions sur $\mathbb{R}^N$, est nulle.
Plus précisément, $q(N) = +\infty$ si $N = 1$ ou $N = 2$ et $q(N) = \frac{N}{N-2}$ si $N \geq 3$.

On admet (fait connu) l'existence d'une fonction plateau régulière $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
$$\begin{cases} \theta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ et } 0 \leq \theta(x) \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N \\ \theta(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in B(0,1) \\ \theta(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,2). \end{cases}$$
Soit $R > 1$ et $q > 1$ des constantes fixées. On fixe également γ défini par $\gamma := \frac{2q}{q-1}$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on pose
$$\psi_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma}.$$

1. Vérifier que $\psi_R \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ et calculer $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_R(x)$ puis $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi_R(x)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ en fonction de θ et de ses dérivées partielles.

Corrigé : Comme $\gamma > 2$ on a $\psi_R \in C^2(\mathbb{R}^N)$. En effet, en utilisant la formule de dérivée composée,
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_R(x) = \gamma\theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma-1}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{x}{R}\right)\frac{1}{R}.$$
Puis,
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi_R(x) = \gamma(\gamma-1)\theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma-2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{x}{R}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{x}{R}\right)\frac{1}{R^2} + \gamma\theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{x}{R}\right)\frac{1}{R^2}$$
qui sont bien toutes des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ du fait que $\gamma - 2 > 0$ et $\gamma - 1 > 0$.

2. Calculer $\Delta\ \psi_R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et en déduire que ψ_R vérifie la propriété suivante :
$$\exists C > 0 \quad ;\ \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad |\Delta\psi_R(x)| \leq \frac{C}{R^2}\psi_R(x)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$
où C ne dépend que de γ, $\|\nabla\theta\|_\infty$ et $\|\Delta\theta\|_\infty$.

Indication : on pourra remarquer que $\gamma - 2 = \frac{\gamma}{q}$.

Corrigé : En utilisant les calculs donnés à la question 1 on trouve
$$\begin{aligned}\Delta\psi_R(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\psi_R(x)\\ &= \gamma(\gamma-1)\theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma-2}|\nabla\theta|^2\left(\frac{x}{R}\right)\frac{1}{R^2} + \gamma\theta\left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma-1}\Delta\theta\left(\frac{x}{R}\right)\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$
Or $0 \leq \theta \leq 1$ par hypothèse donc $\theta^{\gamma-1} \leq \theta^{\gamma-2}$. Par ailleurs $\gamma = 2q/(q-1)$ par définition. On en déduit que $\gamma - 2 = 2/(q-1) = \gamma/q$. Autrement dit, $\theta^{\gamma-2}(x/R) = \psi_R^{\frac{1}{q}}(x)$.
On en déduit donc que
$$|\Delta\psi_R(x)| \leq \frac{C\theta^{\gamma-2}}{R^2}(\|\nabla\theta\|_\infty + \|\Delta\theta\|_\infty) \leq \frac{C}{R^2}\psi_R^{\frac{1}{q}}(x)$$

On suppose dans toute la suite que $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vérifie l'équation $\Delta u = |u|^q$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

3. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi \, dx.$$

Corrigé : Comme u est une solution au sens des distributions, on sait par définition que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi \, dx.$$

Maintenant si $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ uniformément et $\Delta\varphi_n \to \Delta\varphi$ également uniformément (il suffit de prendre $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ où ρ_n est une approximation de l'unité). En passant à la limite dans

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi_n \, dx,$$

et en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient le résultat souhaité.

4. En utilisant la fonction ψ_R construite précédemment, et l'inégalité de Hölder, montrer que pour tout $R > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \, dx \leq C R^{N-2q'}.$$

Corrigé : Puisque $\psi_R \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \psi_R \, dx.$$

En utilisant le fait que $|\Delta \psi_R| \leq \frac{C}{R^2} \psi_R^{\frac{1}{q}}$, puis Hölder, et le fait que ψ_R est supportée sur $B(0,R)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u||\Delta \psi_R| \, dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{\mathbb{R}^N} |u| \psi_R^{\frac{1}{q}} dx \\
&\leq \frac{C}{R^2} Vol(B(0,R))^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{C'}{R^2} R^{\frac{N}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq C R^{\frac{N}{q'}-2}$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \leq C R^{N-2q'},$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

5. En déduire que si $N \geq 3$ et $q < \frac{N}{N-2}$ alors $u = 0$, et de même, que si $1 \leq N \leq 2$ et $q \in]1, +\infty[$ alors $u = 0$.

Corrigé : Si $N = 1$ ou $N = 2$ on a $N - 2q' < 0$ et donc $CR^{N-2q'} \to 0$. Par ailleurs on remarque que, x fixé, $\Psi_R(x)$ converge vers 1 pour $R \to +\infty$. En passant à la limite et en utilisant Fatou il vient donc

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{R \to +\infty} |u|^q \psi_R(x) dx \leq \liminf_{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R(x) dx = 0.$$

ce qui montre que $u = 0$.
Maintenant si $N \geq 3$ et $q < \frac{N}{N-2}$ on a encore $CR^{N-2q'} \to 0$ donc en raisonnant de la même façon on conclut encore que $u = 0$.