Université de Lorraine **Examen 2019-2020**

EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Exercice 1

Pour tout $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \arctan(nx)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,1}(]-1,1[)$.
2. Montrer que f_n converge dans $\mathcal{D}'([-1,1])$ vers une fonction $f \in L^1(]-1,1[)$ à identifier.
3. Calculer f' dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$ et en déduire que f n'appartient pas à $W^{1,1}(]-1,1[)$.

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 et $g \in L^2(\Omega)$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ on note $|x|$ la norme euclidienne i.e. $|x|^2 := \sum_{i=1}^N (x_i)^2$. Pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on pose

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega (u-g)^2 \, dx.$$

1. Montrer que $t \mapsto (t-a)^2$ (pour $a \in \mathbb{R}$) est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est convexe.
2. Soit (u_n) une suite minimisante pour J, c'est à dire telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = \inf\limits_{H_0^1(\Omega)} J$. Montrer que (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$ à partir d'un certain rang.
3. Montrer que J admet un minimiseur. C'est à dire qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que
$$J(u) = \min_{H_0^1(\Omega)} J.$$
4. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En développant $J(u+t\varphi)$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (u-g)\varphi \, dx = 0.$$
5. En utilisant un résultat vu en cours, montrer que $u \in H^2(\Omega)$.

Problème

Dans ce problème on souhaite étudier l'équation non linéaire suivante, pour $q > 1$:

$$\Delta u = |u|^q. \tag{1}$$

En particulier nous allons démontrer le résultat frappant suivant :

<u>*Théorème*</u> *: Il existe $q(N) > 1$ tel que si $1 < q < q(N)$ alors toute solution $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant (1) au sens des distributions sur $\mathbb{R}^N$, est nulle.*
Plus précisément, $q(N) = +\infty$ si $N = 1$ ou $N = 2$ et $q(N) = \frac{N}{N-2}$ si $N \geq 3$.

On admet (fait connu) l'existence d'une fonction plateau régulière $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ et } 0 \leq \theta(x) \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N \\ \theta(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in B(0,1) \\ \theta(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,1). \end{cases}$$

Soit $R > 1$ et $q > 1$ des constantes fixées. On fixe également γ défini par $\gamma := \frac{2q}{q-1}$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on pose

$$\psi_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right)^\gamma.$$

1. Vérifier que $\psi_R \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ et calculer $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_R(x)$ puis $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi_R(x)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ en fonction de θ et de ses dérivées partielles.

2. Calculer $\Delta\ \psi_R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et en déduire que ψ_R vérifie la propriété suivante :

$$\exists C > 0 \quad ; \ \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad |\Delta\psi_R(x)| \leq \frac{C}{R^2}\psi_R(x)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

   où C ne dépend que de γ, $\|\nabla\theta\|_\infty$ et $\|\Delta\theta\|_\infty$.
   Indication : on pourra remarquer que $\gamma - 2 = \frac{\gamma}{q}$.

   On suppose dans toute la suite que $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vérifie l'équation $\Delta u = |u|^q$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

3. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi\, dx.$$

4. En utilisant la fonction ψ_R construite précédemment, montrer que pour tout $R > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R\, dx \leq C R^{N-2q'}.$$

5. En déduire que si $N \geq 3$ et $q < \frac{N}{N-2}$ alors $u = 0$, et de même, que si $1 \leq N \leq 2$ et $q \in]1, +\infty[$ alors $u = 0$.