**Feuille d'exercices 1**
**Formule de la divergence et Fonctions Harmoniques**

**Exercice** 1 —

1. Determiner toutes les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$ (i.e. satisfaisant $\Delta f = 0$).
2. Determiner toutes les fonctions harmoniques homogènes sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ (rappel : $f$ est homogène si $f(x) = g(|x|)$ pour une certaine fonction $g$ à variable réelle).

**Exercice** 2 — (Monotonie de Bonnet) On rappelle l'inégalité de Wirtinger suivante qui se démontre par exemple à l'aide des séries de Fourier, pour toute fonction $u \in C^1(\partial B(x_0, r))$,

$$\int_{\partial B(x_0,r)} |u - m_r|^2 \leq r^2 \int_{\partial B(x_0,r)} \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 d\sigma,$$

où $m_r$ désigne la moyenne de $u$ sur $\partial B(x, r)$ et $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ est la dérivée tangentielle de $u$ le long du cercle $\partial B(x_0, r)$ (c'est à dire $|\frac{\partial u}{\partial \tau}| = |\nabla u \cdot \tau|$ où $\tau$ est un vecteur unitaire tangent au cercle).

1. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$. Montrer que
$$E : r \mapsto \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \, dx$$
est dérivable, et calculer sa dérivée.
2. On suppose à partir de maintenant, ainsi que dans toutes les questions suivantes, que $u$ est une fonction harmonique de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ on a
$$E(r) = \int_{B(x_0,r)} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$
3. Montrer également que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ on a
$$\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$
4. Montrer à l'aide des inégalités successives de Cauchy-Schwarz, Young et Poincaré-Wirtinger que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ on a
$$E(r) \leq \frac{1}{2} r E'(r).$$
5. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$,
$$r \mapsto \frac{1}{r^2} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^2 \, dx$$
est une fonction croissante.

**Exercice** 3 —

1. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}\right) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{N-1},$$
où $\nu$ est la normale unitaire sortante à $\partial B(x_0, r)$
*Indication : On pourra utiliser* $\int_{\partial B(x_0,r)} f(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) = r^{N-1} \int_{\partial B(x_0,1)} f(ry) d\mathcal{H}^{N-1}(y)$.

2. En déduire la formule de la moyenne : si $\Delta u = 0$ alors

$$\text{pour tout } r > 0, \quad \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) d\mathcal{H}^{N-1} = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx = u(x_0),$$

   où $\omega_N$ est le volume de la boule unité.

3. On suppose que $u \in C^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que $\Delta u = 0$. Déduire de la formule de la moyenne que

$$|\partial_{x_i} u(x)| \leq \frac{C}{R} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x,R))}.$$

4. En déduire une preuve du théorème de Liouville : si $u \in C^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est à la fois harmonique et bornée alors elle est constante.

**Exercice** 4 — (Principe de réflection) Soit $H^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; : \;\; y > 0\}$. Soit $u \in C^2(\overline{H^+})$ une fonction harmonique dans $H^+$ telle que $u = 0$ sur $\partial H^+ = \mathbb{R} \times \{0\}$. On considère $v$ la fonction construite de la façon suivante :

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) \text{ si } y \geq 0 \\ -u(x,-y) \text{ si } y < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $v$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $\Delta v = 0$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^2$. En déduire d'après un résultat du cours (chapitre sur les distributions) que $u \in C^\infty(\overline{H^+})$.