Université de Lorraine **2021-2022**
EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Feuille d'exercices 2
Théorie des distributions

Exercice 1 —

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 x^n \varphi^{(n)}(x) dx.$$
Est-ce que T est une distribution sur $\mathbb{R}$?
2. Même question avec $\langle S, \varphi \rangle = \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$.

Exercice 2 —

1. On pose $H = 1\!\!1_{[0,+\infty[}$ et on appelle H la fonction de Heavyside. Montrer que H définit une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et calculer ses dérivées successives.
2. Calculer les dérivées première et seconde de $x \mapsto |x|$.
3. Soit T une distribution d'ordre au plus k. Montrer que T' est une distribution d'ordre au plus $k+1$. Donner un exemple où l'ordre de la dérivée est strictement inférieur à $k+1$.
4. Montrer que δ_0 n'est pas une fonction.
5. Montrer que $\delta_0^{(k)}$ est une distribution d'ordre k.

Exercice 3 — **Lemme d'Hadamard.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que dire de plus si $f'(0) = 0$?

Exercice 4 — **Valeur principale de $\frac{1}{x}$ et division par x**

1. Montrer que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$
existe.
2. Montrer que l'application $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par
$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$
est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$. Cette distribution s'appelle *valeur principale* de $\frac{1}{x}$.
3. Calculer $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln|x|$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa dérivée.
5. Dans cette question, on veut résoudre l'équation $xT = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$. Montrer que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x)$.
   (b) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$. Montrer que $T = c\delta_0$ où c est une constante.
   (c) En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xT = 1$.

6. Montrer que pour toute distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = S$. Y-a-t-il unicité ?
7. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations suivantes :

$$(a) \quad xT = 1; \qquad (b) \quad xT = \delta_0; \qquad (c) \quad xT = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}).$$

Exercice 5 — **Parties finie de** $\frac{1}{x^2}$

1. Montrer que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

existe.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2})$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera l'ordre. Cette distribution s'appelle *partie finie* de $\frac{1}{x^2}$.
3. Montrer que $x\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. Montrer qu'au sens des distributions on a :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}).$$

Exercice 6 — Calculer les limites des suites de distributions suivantes :

$$(a) \quad T_n(x) = \sin(nx); \qquad (b) \quad T_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}; \qquad (c) \quad T_n(x) = n\sin(nx)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}; \qquad (d) \quad n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}).$$

Exercice 7 —

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et posons $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'au sens des distributions $g' = f$.
2. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T' = 0$. *(Indication : utiliser une primitive de $\psi := \varphi - \frac{1}{|supp(\varphi)|}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$ comme fonction test).*

Exercice 8 —

1. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, a \in C^\infty(I)$ et $b \in C^\infty(I)$. Résoudre dans $\mathcal{D}'(I)$ l'équation différentielle

$$T' + aT = b.$$

Indication : on pourra considérer l'équation satisfaite par la distribution $S := e^{at}T$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que $f_k(t) = e^{-kt}H(t)$ (où $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$) est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

$$T' + kT = \delta_0.$$

Soit $g \in C(\mathbb{R})$ à support dans $[0, +\infty[$. Montrer que $f_k * g$ est bien définie et est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

$$T' + kT = g.$$

Exercice 9 —

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x^2}}$ définie une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui prolonge $x \mapsto e^{\frac{1}{x^2}}$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ c'est à dire telle que
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx.$$

Exercice 10 — **Formule de la divergence et de Gauss & Green.** On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert C^∞ si il existe une fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\Omega = \{x \ : \ \rho(x) < 0\}$ et telle que $\nabla \rho \neq 0$ sur $\partial\Omega = \{\rho = 0\}$. Dans ce cas on définit la normale extérieure à Ω au point $x \in \partial\Omega$ par $\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{\|\nabla\rho(x)\|}$.

1. Montrer que la boule euclidienne $B(0, R)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert C^∞. Que vaut la normale extérieure au point $x \in \partial B(0, R)$?
2. Montrer que $T = \nabla \mathbf{1}_\Omega \cdot \nabla\rho = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{1}_\Omega$ est une distribution à support dans $\partial\Omega$.
3. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction décroissante telle que $\theta = 1$ sur $]-\infty, -1]$ et $\theta = 0$ pour $t \geq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $\theta_k(x) = \theta(k\rho(x))$ et $T_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \frac{\partial\theta_k}{\partial x_i}$. Montrer que $T_k \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
4. Montrer que T_k est une fonction positive. En déduire que T est une distribution positive.
5. On sait donc que T est une mesure (corollaire du Théorème de Riesz). On appelle σ la mesure portée sur $\partial\Omega$ définie par
$$\sigma \ := \frac{1}{|\nabla\rho|} T = -\nabla \mathbf{1}_\Omega \cdot \nu = \frac{\partial}{\partial\nu} \mathbf{1}_\Omega.$$
6. En raisonnant par approximation avec T_k, montrer l'identité $\nu_i \sigma = -\frac{\partial}{\partial_{x_i}} \mathbf{1}_\Omega$ au sens des distributions.
7. En déduire la formule de la divergence : pour tout champ de vecteurs $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a
$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x)\varphi(x) dx = -\int_\Omega F(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) F(x) \cdot \nu(x) d\sigma.$$
Indication : utiliser $\mathrm{div}(\varphi \mathrm{F})$ *comme fonction test dans l'identification obtenue à la question précédente.*
8. Montrer en particulier que sous les mêmes hypothèses
$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x) d\sigma.$$
9. Retrouver l'intégration par partie classique en dimension $n = 1$.
10. Pour u et v des fonctions C^∞, montrer la formule de Gauss et Green :
$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega u\Delta v \ dx + \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \ \nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu} \right) \ d\sigma.$$
Remarque : en raisonnant par approximation on peut démontrer que toutes ces inégalités se généralisent à des fonctions F et φ C^1 (au lieu de C^∞) pour la formule de la divergence et C^2 pour Gauss-Green.