Feuille d'exercices 3
Espaces de Sobolev

Exercice 1 — Soit $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in W^{1,p}(\Omega)$ et $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Montrer que $fg \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\frac{\partial(fg)}{\partial_{x_i}} = g\frac{\partial f}{\partial_{x_i}} + f\frac{\partial g}{\partial_{x_i}}.$$

Exercice 2 — Soit $]a,b[\subset \mathbb{R}$ et soit $g \in L^p(]a,b[)$. Pour tout $x \in]a,b[$ on pose

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et que $f \in W^{1,p}(]a,b[)$.
2. Montrer que f est Hölderienne.

Exercice 3 — Pour quelles valeurs de α la fonction

$$x \mapsto (-\ln(\|x\|^2))^\alpha$$

appartient-t-elle à $W^{1,2}(B(0,1/2))$?

Exercice 4 — On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace $W^{1,2}(\Omega)$.
1. Soit Ω un ouvert borné et $u \in H^1(\Omega)$.
2. Montrer que $|u| \in H^1(\Omega)$ et que $|\nabla|u|| \leq |\nabla u|$ p.p.
3. Montrer que si $A > 0$, $u_A := \max(\min(u,A), -A) \in H^1(\Omega)$ et que $|\nabla u_A| \leq |\nabla u|$
4. Soit $g \in L^\infty(\Omega)$. Montrer que la fonctionnelle J définie par

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega (u-g)^2 \, dx$$

possède un minimiseur unique u dans $H^1(\Omega)$, et que $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Exercice 5 — (Examen 2020) Pour tout $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \text{Arctan}\,(nx)$.
1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,1}(]-1,1[)$.
2. Montrer que f_n converge dans $\mathcal{D}'([-1,1])$ vers une fonction $f \in L^1(]-1,1[)$ à identifier.
3. Calculer f' dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$ et en déduire que f n'appartient pas à $W^{1,1}(]-1,1[)$.

Exercice 6 — (Examen 2020)

Dans ce problème on souhaite étudier l'équation non linéaire suivante, pour $q > 1$:

$$\Delta u = |u|^q. \tag{1}$$

En particulier nous allons démontrer le résultat frappant suivant :

<u>Théorème</u> : Il existe $q(N) > 1$ tel que si $1 < q < q(N)$ alors toute solution $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vÃ©rifiant (1) au sens des distributions sur $\mathbb{R}^N$, est nulle.
Plus précisément, $q(N) = +\infty$ si $N = 1$ ou $N = 2$ et $q(N) = \frac{N}{N-2}$ si $N \geq 3$.

On admet (fait connu) l'existence d'une fonction plateau régulière $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ et } 0 \leq \theta(x) \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N \\ \theta(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in B(0,1) \\ \theta(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,2). \end{cases}$$

Soit $R > 1$ et $q > 1$ des constantes fixées. On fixe également γ défini par $\gamma := \frac{2q}{q-1}$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on pose

$$\psi_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right)^\gamma.$$

1. Vérifier que $\psi_R \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ et calculer $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_R(x)$ puis $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi_R(x)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ en fonction de θ et de ses dérivées partielles.
2. Calculer $\Delta\psi_R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et en déduire que ψ_R vérifie la propriété suivante :

$$\exists C > 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad |\Delta\psi_R(x)| \leq \frac{C}{R^2}\psi_R(x)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

   où C ne dépend que de γ, $\|\nabla\theta\|_\infty$ et $\|\Delta\theta\|_\infty$.
   Indication : on pourra remarquer que $\gamma - 2 = \frac{\gamma}{q}$.

   On suppose dans toute la suite que $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vérifie l'équation $\Delta u = |u|^q$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.
3. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi \, dx.$$

4. En utilisant la fonction ψ_R construite précédemment, et l'inégalité de Hölder, montrer que pour tout $R > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_R \, dx \leq CR^{N-2q'}.$$

5. En déduire que si $N \geq 3$ et $q < \frac{N}{N-2}$ alors $u = 0$, et de même, que si $1 \leq N \leq 2$ et $q \in]1, +\infty[$ alors $u = 0$.