Université de Lorraine **2021-2022**
EDP Elliptiques – ANTOINE LEMENANT **M2 - MFA**

Feuille d'exercices 4
Lax-Milgram

Exercice 1 — on considère les deux équations suivantes pour $u, c, a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ des fonctions,

$$-\Delta u + cu = 0 \tag{1}$$

$$-\mathrm{div}(a\nabla u) = 0 \tag{2}$$

1. Montrer que si u et w sont solutions de (1) avec $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_*^+$ strictement positive, alors $v = u/w$ est une solution de (2) pour des coefficients a à identifier.
2. Inversement, montrer que si v est une solution de (2) avec a des coefficients positifs, alors $u := va^{1/2}$ est une solution de (1) pour un certain potentiel c à identifier.

Exercice 2 — Soit L l'opérateur différentiel sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ défini par

$$Lu = cu - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

où $a^{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ et $c : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions bornées avec $(a_{i,j})$ elliptiques. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que sous la condition suivante

$$\inf_{x\in\Omega} c(x) \geq -\mu,$$

la forme bilinéaire associée à L vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sur l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Exercice 3 — (Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert C^1 connexe. En raisonnant par contradiction et compacité, montrer l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - u_\Omega\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2.$$

Exercice 4 — On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert régulier connexe. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Ecrire la formulation faible du problème

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Y-a-t-il unicité de solution pour (*) ? Montrer que $(*)$ admet une solution faible si et seulement si

$$\int_\Omega f dx = 0.$$

Indication : chercher une solution à moyenne nulle.

Exercice 5 — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier, soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ relativement compact (non vide) dans $\partial\Omega$. Ecrire la formulation faible du problème mixte

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases}$$

en introduisant un sous-espace de $H^1(\Omega)$ bien choisi. Puis montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans cet espace.

Exercice 6 — (Examen 2021) Pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on note $\nabla^\perp u(x,y) = (-\frac{\partial}{\partial y}u, \frac{\partial}{\partial x}u)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ on note également $a \cdot b = \langle a, b \rangle$ le produit scalaire euclidien.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe C^1, $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ et $g \in L^\infty$. On souhaite résoudre (au sens faible) le problème

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1. En supposant que $u \in C^2(\Omega)$ et $g \in C^1(\Omega)$, montrer que l'équation
$$-\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u = f$$
peut s'écrire sous la forme $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ avec une matrice A (variable) à déterminer, qui dépend de g. Dans la suite on désignera toujours pas A cette matrice.
2. En déduire la formulation faible associée au problème (P).
3. Montrer l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ à l'aide du théorème de Lax-Milgram.
4. Aurait-on pu trouver cette solution faible en minimisant le problème variationel suivant ?
$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_\Omega uf. \tag{3}$$
5. On suppose dans cette question que $f = 0$ et $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifie $|g| \leq 1$. On note $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible de (P). Montrer que sous ces hypothèses, on a l'identité remarquable suivante :
$$\|g\nabla u\|_2 \leq 8\|u\nabla g\|_2$$