Université de Lorraine **2020-2021**

EDP Elliptiques – ANTOINE LEMENANT **M2 - MFA**

Examen – Durée 1h30

Pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on note $\nabla^\perp u(x,y) = (-\frac{\partial}{\partial y}u, \frac{\partial}{\partial x}u)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ on note également $a \cdot b = \langle a, b\rangle$ le produit scalaire euclidien.

Partie 1

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe C^1, $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty$. On souhaite résoudre (au sens faible) le problème

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1. En supposant que $u \in C^2(\Omega)$ et $g \in C^1(\Omega)$, montrer que l'équation

$$-\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u = f$$

   peut s'écrire sous la forme $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ avec une matrice A (variable) à déterminer, qui dépend de g. Dans la suite on désignera toujours pas A cette matrice.
2. En déduire la formulation faible associée au problème (P).
3. Montrer l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ à l'aide du théorème de Lax-Milgram.
4. Aurait-on pu trouver cette solution faible en minimisant le problème variationel suivant ?

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_\Omega uf. \tag{1}$$

5. On suppose dans cette question que $f = 0$ et $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifie $|g| \leq 1$. On note $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible de (P). Montrer que sous ces hypothèses, on a l'identité remarquable suivante :

$$\|g\nabla u\|_2 \leq 8\|u\nabla g\|_2$$

Partie 2

On souhaite maintenant résoudre le problème semi-linéaire suivant pour $0 < \beta < 1$ et toujours $g \in L^\infty(\Omega)$,

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u = u^\beta & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous souhaitons utiliser le théorème de point fixe de Schauder dont on rappelle ci-dessous l'énoncé :

Théorème. *Soit E un espace de Banach et $C \subset E$ une partie convexe, fermée, bornée. Soit $T : C \to C$ une application continue telle que $\overline{T(C)}$ est compact. Alors T admet un point fixe dans C.*

Pour cela on considère l'opérateur $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $v \in L^2(\Omega)$ associe la solution u du problème (P) avec second membre $f = v^\beta$. (On remarque que $v^\beta \in L^2$ car $\beta < 1$ et Ω est borné).

6. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que
$$\|T(v)\|_{H^1} \leq C\|v\|_{H^1}^\beta.$$
7. Montrer que si v_n est une suite telle que $\sup_n \|v_n\|_{H^1} \leq C$ et $v_n \to v$ dans L^2, alors $T(v_n) \to T(v)$ dans L^2.
8. En déduire à l'aide du théorème de point fixe de Schauder, qu'il existe une solution faible pour le problème (Q).

Partie 3

Dans cette partie on pourra admettre l'hypothèse (H) suivante : *si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de (Q) avec $g \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_\infty \leq C\|\nabla u\|_2$ avec $C > 0$ une constante universelle.*

9. En s'inspirant de la méthode utilisée lors de la partie 2, montrer que sous l'hypothèse (H), il existe une solution faible pour le système suivant, avec $0 < \alpha, \beta < 1$

$$(S) \begin{cases} -\Delta u + \nabla^\perp v \cdot \nabla u = v^\alpha & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v + \nabla^\perp u \cdot \nabla v = u^\beta & \text{dans } \Omega \\ (u, v) \in (H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2 \end{cases}$$