Université de Lorraine **2020-2021**

EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Examen – Durée 1h30

On note $|x|$ la norme euclidienne d'un vecteur de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathbf{1}_A$ l'indicatrice d'un ensemble A qui vaut 1 sur A et 0 en dehors. On note également $|A|$ le volume de A (i.e. sa mesure de Lebesgue). Si A est un ouvert régulier et que $\psi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^N)$ est un champ de vecteur régulier, on rappelle la formule de la divergence

$$\int_A \operatorname{div}(\psi)\, dx = \int_{\partial A} \psi \cdot \nu \, d\sigma$$

où ν est la normale extérieure au bord de A.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $D \subset \mathbb{R}^N$ deux ouverts bornés réguliers de classe C^∞ tels que $\overline{D} \subset \Omega$. Soit $\alpha > 0$ une constante telle que $\alpha \neq 1$. On introduit la fonction g discontinue sur $\mathbb{R}^N$ définie par

$$g(x) = \alpha \mathbf{1}_D(x) + \mathbf{1}_{\mathbb{R}^N \setminus D}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

On souhaite étudier le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div}(g \nabla u) = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Partie 1 : Cas de la dimension 1

1. Soit $[a, b]$ un intervalle, et $\alpha > 0$ une constante. Trouver la forme générale d'une solution C^2 à l'équation $-\alpha u'' = 1$ sur $[a, b]$.
2. Soit $a < b < c$ des réels et $\alpha > 0$ une constante différente de 1. On suppose que u est une fonction C^2 sur $]a, c[\setminus\{b\}$ qui vérifie $-\alpha u'' = 1$ sur $]a, b[$ et $-u'' = 1$ sur $]b, c[$. On suppose que u est également dans $H^1(]a, c[)$. Trouver une condition portant sur les valeurs des dérivées à gauche et à droite au point b de u pour que l'équation $-\big((\alpha \mathbf{1}_{]a,b[} + \mathbf{1}_{]b,c[})u'\big)' = 1$ soit vérifiée au sens des distributions sur $]a, c[$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ donné, determiner une solution au sens des distributions de (P) dans le cas où $N = 1$, $\Omega =]-2, 2[$ et $D =]-1, 1[$ (on pourra supposer que la fonction est paire et continue sur $]-2, 2[$ pour simplifier l'étude).

Partie 2 : Dimension quelconque

4. Justifier l'existence d'une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ pour le problème (P).
5. Justifier à l'aide de théorèmes vus en cours que $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^\infty(D) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$ et u se prolonge de façon C^1 de chaque côté de ∂D ainsi que sur $\partial\Omega$.
6. Soit $B(x_0, r)$ une boule centrée en un point $x_0 \in \partial D$ et soit φ une fonction test $C_c^\infty(B(x_0, r))$. En utilisant la formulation faible de (P) et la formule de la divergence, montrer que
$$\int_{\partial D \cap B(x_0,r)} \left(\alpha \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x) \right) \varphi \, d\sigma(x) = 0$$
où $u^+ = u|_{\Omega \setminus D}$, $u^- = u|_D$, et ν est la normale extérieure sur ∂D. (on pourra supposer que ∂D sépare la boule $B(x_0, r)$ en deux parties que l'on notera $B^+(x_0, r)$ et $B^-(x_0, r)$).

Remarque : ceci entraine qu'une solution u doit vérifier :
$$\alpha \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \partial D. \tag{1}$$

Partie 3 : Solution radiale en dimension 2.

Le but de cette partie est de construire une solution explicite u dans le cas où $N = 2$, $\Omega = B(0, R)$ et $D = B(0, 1)$.

7. Soit v une fonction radiale C^2, c'est à dire de la forme $v(x) = f(|x|)$. Calculer Δu en fonction des dérivées de f.
8. On suppose que u est une solution radiale du problème (P) avec $\Omega = B(0, R)$ et $D = B(0, 1)$. Determiner l'expression générale de u dans $B(0, R) \setminus B(0, 1)$ et dans $B(0, 1)$ séparément.
9. Montrer que l'on peut fixer les paramètres de façon à ce que u soit continue et vérifie (1). En déduire qu'il existe une unique solution distribution de (P) radiale continue.