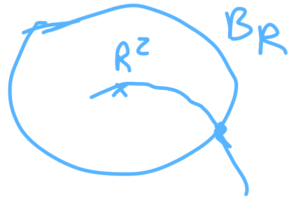


$f \in W_0^{1,p}(B_R)$

Université de Lorraine **Examen 2019-2020**

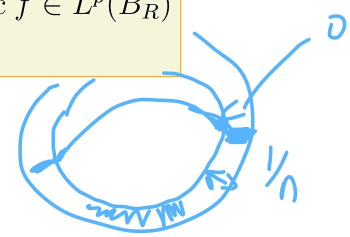
EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Problème

Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ on pose $f(x) = R^2 - |x|^2$ où $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ est la norme euclidienne. On note $B_R \subset \mathbb{R}^2$ la boule euclidienne ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon R.

1. Calculer $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et justifier (rapidement) le fait que $f \in W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Corrigé : Un simple calcul montre que $\nabla f(x) = -2x$. La fonction f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, f et ∇f sont bornées sur $\overline{B}_R$ et donc $f \in L^p(B_R)$ et $\nabla f \in L^p(B_R)$ donc $f \in W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.



2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} (R - \frac{1}{n})^2 - |x|^2 & \text{si } x \in B_{R-\frac{1}{n}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En "intégrant par parties" (i.e. en utilisant la formule de la divergence), montrer que, au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(B_R)$,

$$\nabla f_n(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in B_{R-\frac{1}{n}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et en déduire que $f_n \in W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Corrigé : La fonction $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et donc elle définit bien une distribution. Soit $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$. En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f_n \nabla\varphi \, dx = \int_{B_{R-\frac{1}{n}}} f_n \nabla\varphi \, dx &= -\int_{B_{R-\frac{1}{n}}} (-2x)\varphi \, dx + \cancel{\int_{\partial B_{R-\frac{1}{n}}} \underbrace{f_n}_{=0} \varphi\nu \, d\sigma} \\ &= -\int_{B_{R-\frac{1}{n}}} (-2x)\varphi \, dx \end{aligned}$$

car $f_n = 0$ sur $\partial B_{R-\frac{1}{n}}$. On a donc démontré que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$,

$$\langle \nabla f_n, \varphi \rangle = \langle -2x\mathbf{1}_{B_{R-\frac{1}{n}}}, \varphi \rangle$$

ce qui montre bien que $\nabla f_n = -2x\mathbf{1}_{B_{R-\frac{1}{n}}}$ dans $\mathcal{D}'(B_R)$. On constate que $f_n \in L^p(B_r)$ et $\nabla f_n \in L^p(B_R)$ donc finalemnet $f_n \in W^{1,p}(B_R)$.

3. Montrer que f_n converge vers f dans $W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.

Corrigé :

On a :

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \int_{B_R} |f_n - f|^p \, dx = \int_{B_R \setminus B_{R-\frac{1}{n}}} |f_n - f|^p \, dx + \int_{B_{R-\frac{1}{n}}} |f_n - f|^p \, dx \\
&= \int_{B_R \setminus B_{R-\frac{1}{n}}} (R^2 - |x|^2)^p \, dx + \int_{B_{R-\frac{1}{n}}} |R^2 - (R - \frac{1}{n})^2|^p \, dx \\
&\leq 2^p R^{2p} \int_{B_R \setminus B_{R-\frac{1}{n}}} 1 \, dx + \int_{B_{R-\frac{1}{n}}} |2R\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}|^p \, dx \\
&\leq 2^p R^{2p} \pi (R^2 - (R - \frac{1}{n})^2) + \pi R^2 \; |2R\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}|^p \\
&\underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul similaire donne

$$\begin{aligned}
\|\nabla f_n - \nabla f\|_p^p &= \int_{B_R} |\nabla f_n - \nabla f|^p \, dx \qquad (2) \\
&= \int_{B_R \setminus B_{R-\frac{1}{n}}} |\nabla f_n - \nabla f|^p \, dx \\
&= \int_{B_R \setminus B_{R-\frac{1}{n}}} |2x|^p \, dx \\
&\underset{n \to +\infty}{\to} 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(B_R)$.

4. Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive à support dans $B(0,1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \, dx = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$ on pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(x/\varepsilon)$. On rappelle que ρ_ε ainsi construite est une approximation de l'unité. Justifier l'existence d'une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $\varepsilon_n \leq \frac{1}{4n}$ et $\rho_{\varepsilon_n} * f_n \to f$ dans $W^{1,p}(B_R)$.

Corrigé : Nous savons déjà que $f_n \to f$ dans $W^{1,p}$. Par ailleurs, pour tout n fixé nous savons que

$$f_n * \rho_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} f_n$$

Ce qui veut dire que pour tout n il existe $\boxed{\varepsilon_n \leq \frac{1}{4n}}$ tel que

$$\|f_n - f_n * \rho_{\varepsilon_n}\|_{W^{1,p}} \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f - f_n * \rho_{\varepsilon_n}\|_{W^{1,p}} &\leq \|f - f_n\|_{W^{1,p}} + \|f_n - f_n * \rho_{\varepsilon_n}\|_{W^{1,p}} \\ &\leq \|f - f_n\|_{W^{1,p}} + \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

En prenant la limsup on obtient

$$\limsup \|f - f_n * \rho_{\varepsilon_n}\|_{W^{1,p}} = 0$$

ce qui montre que $\|f - f_n * \rho_{\varepsilon_n}\|_{W^{1,p}} \to 0$ et donc $f_n * \rho_{\varepsilon_n} \to f$ dans $W^{1,p}$.

5. En déduire que $f \in W_0^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Corrigé : Comme ρ_{ε_n} est une fonction C^∞, on sait que $f * \rho_{\varepsilon_n} \in C^\infty$. D'autre part le support de $f_n * \rho_{\varepsilon_n}$ est contenu dans la somme des supports. Or f_n est supportée dans $B(0, R - \frac{1}{n})$ et ρ_{ε_n} est supportée dans $\overline{B}(0, \varepsilon_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{4n})$. On en déduit que $f_n * \rho_{\varepsilon_n}$ est à support dans $\overline{B}(0, R - \frac{1}{n}) + \overline{B}(0, \frac{1}{4n}) \subset \overline{B}(0, R - \frac{1}{2n})$. Nous avons démontré que $f_n * \rho_{\varepsilon_n}$ est C^∞ à support compact dans $B(0, R)$, pour tout n. Puisque la suite converge vers f dans $W^{1,p}(B_R)$, il en résulte que $f \in W_0^{1,p}(B_R)$ par définition de cet espace.

6. On note $\lambda(R, p)$ la constante

$$\lambda(R, p) := \inf_{v \in W_0^{1,p}(B_R),\, v \neq 0} \frac{\int_{B_R} |\nabla v|^p \, dx}{\int_{B_R} |v|^p \, dx}.$$

quotient R.

On sait d'après le cours que $\lambda_R(R, p) > 0$ et donc, pour toute fonction $v \in W_0^{1,p}(B_R)$ on a toujours :

Poincaré

$$\|v\|^p_{L^p(B_R)} \leq \frac{1}{\lambda(R, p)} \|\nabla v\|^p_{L^p(B_R)}. \tag{5}$$

En utilisant la fonction f montrer que

$$\lambda(R, p) \leq 2^{p+1} \left(\frac{p+1}{p+2} \right) R^{-p}.$$

Corrigé :

On calcule en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |f|^p \, dx &= \int_{B_R} (R^2 - |x|^2)^p \, dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - r^2)^p r \, d\theta dr \\ &= 2\pi \left[\frac{-(R^2 - r^2)^{p+1}}{2(p+1)} \right]_0^R = \pi \frac{R^{2(p+1)}}{(p+1)} \end{aligned} \tag{6}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla f|^p \, dx &= \int_{B_R} 2^p |x|^p \, dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2^p r^p r \, d\theta dr \\ &= 2^{p+1}\pi \int_0^R r^{p+1} \, dr = 2^{p+1}\pi \left[\frac{r^{p+2}}{p+2} \right]_0^R \\ &= 2^{p+1}\pi \frac{R^{p+2}}{p+2} \end{aligned} \tag{7}$$

En faisant le quotient on trouve que

$$\lambda(R,p) \leq \frac{\int_{B_R} |\nabla f|^p \, dx}{\int_{B_R} |f|^p \, dx} = 2^{p+1}\pi \frac{R^{p+2}}{p+2} \times \frac{p+1}{\pi R^{2(p+1)}} = 2^{p+1} \frac{p+1}{p+2} R^{-p}.$$

7. Soit $g \in L^2(B_R)$. Montrer en utilisant le cours, qu'il existe une unique solution faible au problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \operatorname{div}(|x|^2 \nabla u) = g & \text{dans } B_R \\ u \in H_0^1(B_R) & \end{array} \right.$$

$|x|^2 = A(x)$

$\parallel$

$|x|^2 \, Id$

Corrigé : On considère la forme bilinéaire sur $H^1_0(B_R)$ suivante

$$a(u,v) = \int_{B_R} A\nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

où $A(x) = (1+|x|^2)Id$, la matrice Id étant la matrice identité sur $\mathbb{R}^2$ de sorte que, au sens des distributions,

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \operatorname{div}(\nabla u + |x|^2\nabla u) = \Delta u + \operatorname{div}(|x|^2\nabla u)$$

comme souhaité.
En particulier, $\|A(x)\|_{L^\infty} \le (1+R^2)$ sur B_R.
Cette forme bilinéaire est bien continue sur $H^1_0(B_R) \times H^1_0(B_R)$ car en utilisant Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| \le (1+R^2)\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 \le (1+R^2)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

elle est aussi coercive car

$$a(u,u) \ge \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx \ge \frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda(R,2)}{2}\int_{B_R} u^2 \, dx \ge C\|u\|_{H^1_0}.$$

Par ailleurs la forme linéaire

$$v \mapsto \int_{B_R} vg \, dx$$

est continue, grâce encore à Cauchy-Schwarz.
En appliquant le théorème de Lax-Milgram on en déduit qu'il existe une unique solution faible au problème (P).

8. Soit u la solution pour le problème (P) de la question précédente. En utilisant u elle même comme fonction test dans la formulation faible ainsi que l'inégalité $\underbrace{ab \le \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2}_{\text{Young}}$, montrer l'estimation

$$\underbrace{\int_{B_R} |x|^2|\nabla u|^2 \, dx} \le \frac{1}{4\lambda(R,2)}\int_{B_R} g^2 \, dx.$$

= inégalité de Hardy =

$\int_{B_R} |x|^\alpha f(x) \le$ Hardy.

Corrigé : D'après la formulation faible on sait que pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(B_R)$ on a

$$\int_{B_R} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int |x|^2 \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B_R} g\varphi \, dx.$$

En particulier cela donne, pour $\varphi = u$,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{B_R} |x|^2 |\nabla u|^2 \, dx &= \int_{B_R} gu \, dx \\
&\leq \|u\|_2 \|g\|_2 \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \int_{B_R} u^2 \, dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{B_R} g^2 \, dx \\
&\leq \frac{\alpha}{2\lambda(R,2)} \int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{B_R} g^2 \, dx.
\end{aligned}$$

On déduit l'inégalité souhaitée en posant $\alpha = 2\lambda(R,2)$ et en retranchant $\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx$ de chaque côté.

9. Soit g_n une suite de $L^2(B_R)$ telle que $g_n \to g$ dans $L^2(B_R)$. Soit u_n la solution du problème

$$(P_n) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_n - \mathrm{div}(|x|^2 \nabla u_n) = g_n & \text{dans } B_R \\ u_n \in H_0^1(B_R) & \end{array} \right.$$

Montrer que u_n est bornée dans $H^1(B_R)$. En déduire qu'il existe une sous-suite n_k telle que u_{n_k} converge fortement dans $L^2(B_R)$, et montrer enfin que la limite n'est autre que la solution u du problème (P).

Corrigé : En reprenant la même preuve de la question précédente appliquée à u_n mais en posant cette fois $\alpha = \lambda(R,2)$ on trouve l'estimation

$$\int_{B_R} |\nabla u_n|^2 \, dx + \int_{B_R} |x|^2 |\nabla u_n|^2 \, dx \leq \frac{1}{2\lambda(R,2)} \int_{B_R} g_n^2 \, dx.$$

Puisque (g_n) est une une suite convergente, elle est uniformément bornée dans L^2 et donc

$$\sup_n \int_{B_R} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq C.$$

En utilisant de plus (5) on en déduit que (u_n) est uniformément bornée dans $H^1(B_R)$, et il existe une sous-suite qui converge faiblement dans H^1. Par injection compacte dans L^2 on peut supposer que cette sous suite converge également fortement dans L^2. Soit v la limite. En passant à la limite dans la formulation faible pour tout φ fixée, on en déduit que v satisfait la formulation faible associée au problème (P). Par unicité de la solution, on conclut que $v = u$.

$$\int_{B_R} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi + \int_{B_R} |x|^2 \nabla u_n \cdot \nabla \varphi = \int_{B_R} g_n \varphi$$

$$\langle |x|^2 \nabla u_n, \nabla \varphi \rangle$$

$$\langle \nabla u_n, \underbrace{|x|^2 \nabla \varphi}_{L^2} \rangle$$

$$\langle \nabla u_n, \nabla \varphi \rangle_{L^2}$$

faible L^2 $\downarrow$

$$g_n \xrightarrow{L^2} g$$

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle \nabla u_n, \underbrace{|x|^2 \nabla \varphi}_{L^2} \rangle = \int_{B_R} g \varphi$$

L^2 faible $\downarrow$

$$\langle \nabla u, |x|^2 \nabla \varphi \rangle$$