Université de Lorraine **Examen 2019-2020**

EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Problème

Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$ on pose $f(x) = R^2 - |x|^2$ où $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ est la norme euclidienne. On note $B_R \subset \mathbb{R}^2$ la boule euclidienne ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon R.

1. Calculer $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et justifier (rapidement) le fait que $f \in W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$f_n(x) = \begin{cases} (R - \frac{1}{n})^2 - |x|^2 & \text{si } x \in B_{R-\frac{1}{n}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En "intégrant par parties" (i.e. en utilisant la formule de la divergence), montrer que, au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(B_R)$,
$$\nabla f_n(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in B_{R-\frac{1}{n}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
et en déduire que $f_n \in W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
3. Montrer que f_n converge vers f dans $W^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
4. Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive à support dans $B(0,1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \rho \, dx = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$ on pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(x/\varepsilon)$. On rappelle que ρ_ε ainsi construite est une approximation de l'unité. Justifier l'existence d'une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $\varepsilon_n \leq \frac{1}{4n}$ et $\rho_{\varepsilon_n} * f_n \to f$ dans $W^{1,p}(B_R)$.
5. En déduire que $f \in W_0^{1,p}(B_R)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
6. On note $\lambda(R,p)$ la constante
$$\lambda(R,p) := \inf_{v \in W_0^{1,p}(B_R),\, v \neq 0} \frac{\int_{B_R} |\nabla v|^p \, dx}{\int_{B_R} |v|^p \, dx}.$$
On sait d'après le cours que $\lambda_R(R,p) > 0$ et donc, pour toute fonction $v \in W_0^{1,p}(B_R)$ on a toujours :
$$\|v\|^p_{L^p(B_R)} \leq \frac{1}{\lambda(R,p)} \|\nabla v\|^p_{L^p(B_R)}. \tag{1}$$
En utilisant la fonction f montrer que
$$\lambda(R,p) \leq 2^{p+1}\left(\frac{p+1}{p+2}\right) R^{-p}.$$

7. Soit $g \in L^2(B_R)$. Montrer en utilisant le cours, qu'il existe une unique solution faible au problème

$$(P) \begin{cases} -\Delta u - \operatorname{div}(|x|^2 \nabla u) = g & \text{dans } B_R \\ u \in H_0^1(B_R) \end{cases}$$

8. Soit u la solution pour le problème (P) de la question précédente. En utilisant u elle même comme fonction test dans la formulation faible ainsi que l'inégalité $ab \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2$, montrer l'estimation

$$\int_{B_R} |x|^2 |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{1}{4\lambda(R,2)} \int_{B_R} g^2 \, dx.$$

9. Soit g_n une suite de $L^2(B_R)$ telle que $g_n \to g$ dans $L^2(B_R)$. Soit u_n la solution du problème

$$(P_n) \begin{cases} -\Delta u_n - \operatorname{div}(|x|^2 \nabla u_n) = g_n & \text{dans } B_R \\ u_n \in H_0^1(B_R) \end{cases}$$

   Montrer que u_n est bornée dans $H^1(B_R)$. En déduire qu'il existe une sous-suite n_k telle que u_{n_k} converge fortement dans $L^2(B_R)$, et montrer enfin que la limite n'est autre que la solution u du problème (P).