Partie 1 :

1. si $-\alpha u'' = 1$ sur $[a,b]$ alors

$$-\alpha u' = x + C$$

$$-\alpha u = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

donc $\boxed{u(x) = -\frac{x^2}{2\alpha} + C_1 x + C_2 \ , \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

2. supposons $\begin{cases} -\alpha u'' = 1 & \text{sur }]a,b[\\ -u'' = 1 & \text{sur }]b,c[\end{cases}$ $(*)$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]a,b[)$ une fonction test

alors $\left\langle -\left(\left(\alpha 1\!\!1_{]a,b[} + 1\!\!1_{]b,c[}\right)u'\right)', \varphi \right\rangle$

$$= \left\langle \left(\alpha 1\!\!1_{]a,b[} + 1\!\!1_{]b,c[}\right)u', \varphi' \right\rangle$$

$u' \in L^1_{loc}$ car $u \in H^1(]a,b[)$ donc

$$= \int_a^b \alpha u' \varphi' dx + \int_b^c u' \varphi'$$

en intégrant par parties :

$$= [\alpha u' \varphi]_a^b - \int_a^b \alpha u'' \varphi \, dx + [u'\varphi]_b^c - \int_b^c u'' \varphi \, dx$$

Puis en utilisant que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(c) = 0$ (car $\varphi \in C_c^\infty(]a,c[)$), et $(*)$, on obtient :

$$+ \alpha u'(b)^{(-)} \varphi(b) + \int_a^b 1 . \varphi \, dx - u'(b)^{(+)} \varphi(b) + \int_b^c 1 \varphi \, dx$$

$$= \varphi(b)\left[\alpha u'(b)^{(-)} - u'(b)^{(+)}\right] + \int_a^c 1 \varphi \, dx$$

donc en notant $u'^{(+)}(b)$ la dérivée à droite et $(u')^{(-)}(b)$ la dérivée à gauche de u, sous la condition :

$$\boxed{\alpha\, u'(b)^{(-)} = u'(b)^{(+)}} \qquad (**)$$

on obtient bien $-\left(\left(\alpha 1\!\!1_{]a,b[} + 1\!\!1_{]b,c[}\right)u'\right)' = 1$

dans $\mathcal{D}'(]a,b[)$.

3. On cherche une fonction paire sur $]-2,2[$

D'après 1. On sait que $-\alpha u'' = 1$ sur $]-1,1[$ et donc $u(x) = \frac{-x^2}{2\alpha} + C_1 x + C_2$ sur $]-1,1[$.

Puisque la fonction cherchée est paire on doit avoir

$u(1) = u(-1) \Rightarrow C_1 = 0$

donc $u(x) = \frac{-x^2}{2\alpha} + C_2$ sur $]-1,1[$ avec une constante C_2 à déterminer.

Par ailleurs sur $]1,2[$ la fonction vaut

$\frac{-x^2}{2} + C_3 x + C_4$ car $-u'' = 1$

de même par parité on a $C_3 = 0$ et

$u = \frac{-x^2}{2} + C_4$ sur $]1,2[$.

d'après la condition initiale $u(2) = 0$

donc $-\frac{4}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 2$

on trouve donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$ sur $]1,2[$

enfin en utilisant $(**)$:

la dérivée à gauche vaut $-\frac{x}{\alpha}$, au point 1

on trouve $-\frac{1}{\alpha}$.

la dérivée à droite vaut $-x$, au point 1 on trouve -1

on a bien $\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -1$ donc $(*)$ est vérifiée.

la solution cherchée est donc

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{sur }]1,2[\\ -\frac{x^2}{2\alpha} + C & \text{sur }]-1,1[\end{cases}$$

on fixe enfin C de sorte que u soit continue,

on trouve :

$$\boxed{u(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{sur }]-2,2[\setminus]-1,1[\\ -\frac{x^2}{2\alpha} + \left(\frac{1+3\alpha}{2\alpha}\right) & \text{sur }]-1,1[\end{cases}}$$

4. On applique le théorème de Lax-Milgram.

l'équation $-\operatorname{div}(A\nabla u) = 1$ est sous forme divergence avec $A \in L^\infty$ et $A = \alpha 1\!\!1_D + 1\!\!1_{\Omega \setminus D}$

$$u \longmapsto \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle \, dx$$

est coercive ~~sur~~ H^1_0 car $A\xi \cdot \xi \geq \min(\alpha, 1)|\xi|^2$

$$u \longmapsto \int_\Omega u \times 1 \, dx \quad \text{est linéaire continue sur } H^1_0$$

donc il existe une unique solution faible dans H^1_0 d'après un théorème vu en cours.

5. Puisque $A \in L^\infty$, le théorème de De Giorgi implique $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Par ailleurs u vérifie : $-\Delta u = 1$ dans $\Omega \setminus D$

et $-\alpha \Delta u = 1$ dans D

donc d'après la théorie de régularité elliptique

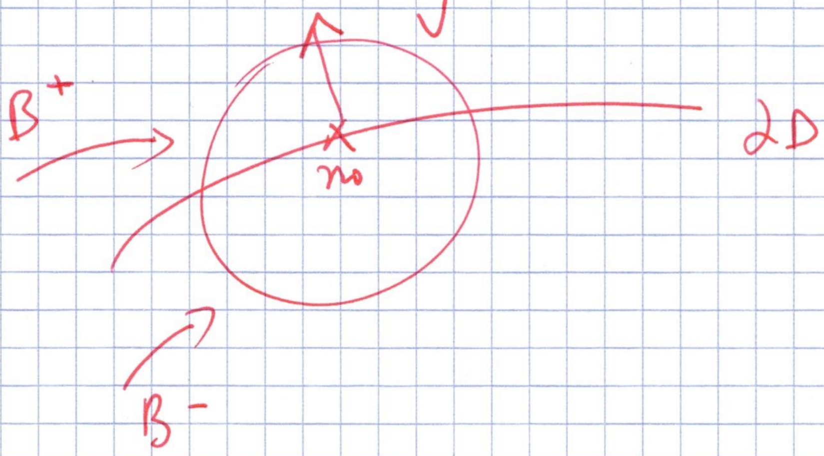
$u \in C^\infty(\Omega \setminus D)$ et $u \in C^\infty(D)$

(car $1 \in C^\infty$).

Puisque ∂D et $\partial\Omega$ sont réguliers, la régularité de u se prolonge sur le bord également.

6. On considère $B(x_0,r)$ une boule centrée en $x_0 \in \partial D$ et $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0,r))$.

∂D divise $B(x_0,r)$ en $B^+(x_0,r)$ et $B^-(x_0,r)$



D'après la formulation faible on a

$$\int_B (\alpha 1\!\!1_D + 1\!\!1_{\Omega \setminus D})\, \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_B \varphi \, dx$$

$$= \int_{B^+} \alpha \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{B^-} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_B \varphi \, dx$$

en utilisant la formule de la divergence et le fait que $\varphi = 0$ sur ∂B (car $\varphi \in C_c^\infty(B)$) on trouve

$$-\int_{B^-} \underbrace{\operatorname{div}(\alpha \nabla u)}_{=1} \varphi + \int_{\partial D \cap B} +\alpha \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \varphi \, d\sigma$$

$$-\int_{B^+} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{=1} \varphi + \int_{\partial D \cap B} -\frac{\partial u^+}{\partial \nu} \varphi \, d\sigma = \int_B \varphi \, dx$$

(au "sens fort" dans B^+ et B^-)

$$\Rightarrow \cancel{+\int_{B^+} \varphi} \cancel{+\int_{B^-} \varphi} + \int_{\partial D \cap B} +\alpha \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \varphi \, d\sigma + \int_{\partial D \cap B} -\frac{\partial u^+}{\partial \nu} \varphi \, d\sigma = \cancel{\int_B \varphi \, dx}$$

il en découle :

$$\int_{\partial D\cap B} \frac{\partial u^+}{\partial \nu}\varphi\, d\sigma = \int_{\partial D\cap B} \alpha \frac{\partial u^-}{\partial \nu}\varphi\, d\sigma$$

comme souhaité.

7. si $v(x) = f(|x|)$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v(x) = f'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$$

puis $$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v(x) = f''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + f'(|x|)\frac{|x| - x_i \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2}$$

$$= f''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + f'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)$$

en sommant, $$\boxed{\Delta v(x) = f''(|x|) + f'(|x|)\frac{1}{|x|}}$$

8. On cherche à résoudre $-\Delta v = 1/\alpha$

ce qui revient à trouver f telle que $f\in C^2(\mathbb{R}^+)$

et $$-f''(r) - f'(r)\frac{1}{r} = 1/\alpha$$

~~l'équation~~ en multipliant par r on trouve :

$$-rf''(r) - f'(r) = r/\alpha \Rightarrow -(rf'(r))' = r/\alpha$$

d'où $rf'(r) = -\frac{r^2}{2\alpha} + C$ puis $f'(r) = -\frac{r}{2\alpha} + \frac{C}{r}$

donc finalement

$$f(r) = -\frac{r^2}{4\alpha} + C_1 \ln(r) + C_2$$

et $v(\cancel{x}) = -\frac{|x|^2}{4\alpha} + C_1 \ln(|x|) + C_2$

~~on~~ $\cancel{\forall}$ sur $B(0,1)$ et $B(0,R) \setminus B(0,1)$

9. On cherche v de classe C^2 dans $B(0,1)$

donc $C_1 = 0$ ie $v(x) = \frac{-|x|^2}{4\alpha} + C_2$ dans $B(0,1)$

dans $B(0,R) \setminus B(0,1)$ ~~on~~ a $v(x) = \frac{-|x|^2}{4} + C_3 \ln(|x|) + C_4$

on souhaite $v \in H^1_0(B(0,R))$ donc

$$-\frac{R^2}{4} + C_3 \ln(R) + C_4 = 0 \qquad (\ast\ast\ast)$$

Pour vérifier (1) on regarde la dérivée en r de f :

$$\left(-\frac{r^2}{4\alpha} + C_2\right)' = -\frac{r}{2\alpha} \quad \text{donc} = \frac{-1}{2\alpha} \quad \text{pour } r=1$$

$$\left(\frac{-r^2}{4} + C_3 \ln(r) + C_4\right)' = \frac{-r}{2} + C_3 \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} + C_3$$

pour $r=1$

donc (1) est vrai sous la condition

$$-\frac{1}{2\alpha} = -\frac{1}{2} + C_3 \quad \text{ce qui fixe } C_3,$$

et donc C_4 par $(\ast\ast\ast)$.

reste à fixer C_2 pour que v soit continue :

Pour cela on souhaite $\quad -\frac{1}{4} + C_4 = -\frac{1}{4\alpha} + C_2$

finalement :

$$C_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}$$

$$C_4 = \frac{R^2}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right)\ln(R)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{4}\right) + \frac{R^2}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right)\ln(R)$$

et

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x|^2}{4\alpha} + C_2 & \text{sur } B(0,1) \\[2ex] \dfrac{-|x|^2}{4} + C_3 \ln(|x|) + C_4 & \text{sur } B(0,R) \setminus B(0,1) \end{cases}$$

C'est l'unique solution continue, radiale, possible.
et celle-ci vérifie bien l'équation.