Corrigé de l'examen 2021

EDP elliptiques

M2 MFA

NANCY

A. Lemenant

Q1 : on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -g \\ g & 1 \end{pmatrix}$

Alors $A\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u - g\partial_2 u \\ g\partial_1 u + \partial_2 u \end{pmatrix}$

Si bien que

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = -\left[\partial_1(\partial_1 u - g\partial_2 u) + \partial_2(g\partial_1 u + \partial_2 u)\right]$$

$$= -\left[\partial_1^2 u - \partial_1 g\,\partial_2 u - \cancel{g\,\partial_1\partial_2 u} + \partial_2 g\,\partial_1 u + \cancel{g\,\partial_2\partial_1 u} + \partial_2^2 u\right]$$

$$= -\left[\Delta u - \nabla^\perp g \cdot \nabla u\right]$$

$$= -\Delta u + \nabla^\perp g \cdot \nabla u$$ comme souhaité.

Rq: Pour trouver la matrice A au brouillon on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{quelconque,}$$

faire les calculs de $-\mathrm{div}(A\nabla u)$ et trouver les coefficients a, b, c, d qui fonctionnent.

2. La formulation faible associée à (P) est

$$\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

soit autrement, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega g \, \nabla^\perp u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v}$$

Q3. on prend la forme bilinéaire

$$\int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \quad \text{sur } H^1_0(\Omega)^2$$

elle est bien coercive car

$$\int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

et continue car $g \in L^\infty$ donc

$$\left| \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla v \rangle \right| \leq (1 + \|g\|_\infty) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

et la forme linéaire

$L_f(v) = \int_\Omega f v$ est bien continue

sur H^1_0.

Donc d'après Lax-Milgram il existe une solution faible (unique).

Q4. NON car A n'est pas symétrique. Le minimiseur suggéré vérifie une autre equation, à savoir, $-\Delta u = f$.

Q5. On part de la formulation faible et on prend ug^2 comme fonction test. Comme $u \in H^1_0(\Omega)$ et $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ on a bien $ug^2 \in H^1_0(\Omega)$

On en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (g^2 \nabla u + 2ug\nabla g) + \underbrace{g\nabla^\perp u \cdot (g^2 \nabla u + 2ug \nabla g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } \nabla^\perp u \cdot \nabla u = 0}} = 0$$

donc $\displaystyle \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 + \underbrace{\int_\Omega 2ug\, \nabla u \cdot \nabla g}_{I} + \underbrace{\int_\Omega g \nabla^\perp u \cdot 2ug \nabla g}_{II} = 0$

On procède ainsi ; en utilisant Cauchy-Schwarz et Young : $ab \leq \frac{\lambda}{2} a^2 + \frac{2}{\lambda} b^2$

$$|I| \leq 2 \left(\int_\Omega g^2 |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 |\nabla g|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \lambda \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 + \frac{4}{\lambda} \int u^2 |\nabla g|^2$$

Puis pour $|II|$, en remarquant que $|\nabla^\perp u| = |\nabla u|$,

$$|II| \leq 2 \left(\int_\Omega g^4 |\nabla^\perp u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 |\nabla g|^2\right)^{1/2}$$

car $|g| \leq 1$

$$\leq \lambda \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 + \frac{4}{\lambda} \int_\Omega u^2 |\nabla g|^2$$

Ainsi, $\displaystyle\int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 dx \leq |I| + |II|$

$$\leq 2\lambda \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 + \frac{8}{\lambda} \int_\Omega u^2 |\nabla g|^2$$

Donc

$$(1-2\lambda) \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 \leq \frac{8}{\lambda} \int_\Omega u^2 |\nabla g|^2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 dx \leq \frac{8}{\lambda(1-2\lambda)} \int_\Omega u^2 |\nabla g|^2 dx$$

en posant $\lambda = \frac{1}{4}$ on trouve

$$\int_\Omega g^2 |\nabla u|^2 dx \leq 8^2 \int_\Omega u^2 |\nabla g|^2 dx$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

Q6. la formulation faible donne

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + \int_\Omega g\, \nabla^\perp u \cdot \nabla w = \int_\Omega v^\beta w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

avec $w = u \in H_0^1(\Omega)$ on trouve,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega v^\beta u$$

or

$$\left|\int_\Omega v^\beta u\right| \leq \left(\int_\Omega v^{2\beta}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

Hölder avec $p = \frac{1}{\beta}$

$$\leq |\Omega|^{\frac{1}{2p'}} \left(\int_\Omega v^2\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}$$

par Poincaré

$$\leq C_* \|\nabla u\|_2 \, |\Omega|^{\frac{1}{2p'}} \left(\int_\Omega v^2\right)^{\beta/2}$$

par Poincaré de nouveau

$$< C' \|\nabla u\|_2 \, \|\nabla v\|_2^\beta$$

d'où finalement,

$$\|\nabla u\|_2 \leq C \|\nabla v\|_2^\beta \leq C \|v\|_{H^1}^\beta$$

comme souhaité.

Q7. si $v_n \longrightarrow v$ dans L^2 alors soit $u_n = T(v_n)$

comme $\|u_n\|_{H^1} \leq C$, $\exists\, n_k$; $u_{n_k} \longrightarrow u$ faible H^1

et $v_n^\beta \to v^\beta$ fort L^2 (car $\beta < 1$).

on a, $\forall\, w \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k} \cdot \nabla w + g \nabla^\perp u_{n_k} \cdot \nabla w = \int_\Omega v_{n_k}^\beta w$$

$\downarrow$ faible L^2 $(g \in L^\infty)$ $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ fort L^2

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + g \nabla^\perp u \cdot \nabla w = \int_\Omega v^\beta w$$

On en déduit que $u = T(v)$. Et par unicité de la limite, la suite complète $T(v_n)$ converge vers $T(v)$.

Q8. On choisit R ; $CR^\beta \leq R$ où C est la constante la question 6.

Alors, en fixant $K = B_{H^1_0(\Omega)}(0, R)$ on a bien $T(K) \subset K$. et K est convexe.

$\overline{K} \subset L^2$ est compact (Rellich) et T est bien continue (Q 7).

donc T admet un point fixe dans K.

Q9 Pour $(v_1, v_2) \in (H^1_0 \cap L^\infty)^2$ on considère (u_1, u_2) solution (unique) de

$$(S') \begin{cases} -\Delta u_1 + \nabla^\perp v_2 \cdot \nabla u_1 = v_2^\alpha \\ -\Delta u_2 + \nabla^\perp v_1 \cdot \nabla u_2 = v_1^\beta \end{cases}$$

on pose $E = L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_2$

T, qui à (v_1, v_2) associe (u_1, u_2) solution de (S')

D'après Partie 2 on a

$$\|u_1\|_{H^1} \leq C \|v_2\|_{H^1}^\alpha$$
$$\|u_2\|_{H^1} \leq C \|v_1\|_{H^1}^\beta$$

donc si R est tq que $CR^\alpha \leq R$ et $CR^\beta \leq R$

on a bien (sous hypothèse (H)) que $T(K) \subseteq K$

où K est le convexe $K := B_{H^1_0}(0, R) \cap L^\infty$

Il faut maintenant vérifier que T est continue et $\overline{T(K)}$ est compact.

si (v_1^n, v_2^n) est une suite de $(L^2 \cap L^\infty)^2$ qui converge dans L^2 vers (v_1, v_2), alors en notant $(u_1^n, u_2^n) = T(v_1^n, v_2^n)$ et en utilisant la borne $\|(u_1^n, u_2^n)\|_{H^1} \leq C$ on peut extraire une sous-suite, c.v faiblement et en utilisant (H) on obtient une borne uniforme sur v_1^n et v_2^n dans L^∞ ce qui permet de passer à la limite dans la formulation faible notamment dans le terme $\int_\Omega v_2^n \nabla^\perp u_1^n \cdot \nabla w$

ce qui montre la continuité.

Enfin pour la compacité on utilise Rellich pour dire que de toute dans K on peut extraire une sous-suite C.V pour L^2 et du fait que la limite est dans l'image on déduit la borne L^∞ de $L(H)$ ce qui montre la compacité de $\overline{T(K)}$.

$\triangle$