Corrigé de l'examen 2021 EDP elliptiques

MZ MFA NANCY

A. Lemenant

Pri) on pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $A \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u - 9 \partial_2 u \\ 9 \partial_1 u + \partial_2 u \end{pmatrix}$

So been one
$$- \operatorname{div}(A \nabla u) = - \left[\partial_1 \left(\partial_1 u - 9 \partial_2 u \right) \right]$$

$$+ \partial_2 \left(9 \partial_1 u + \partial_2 u \right)$$

$$+ \partial_2 \left(9 \partial_1 u + \partial_2 u \right)$$

$$+ \partial_3 \partial_4 u + \partial_3 u \right]$$

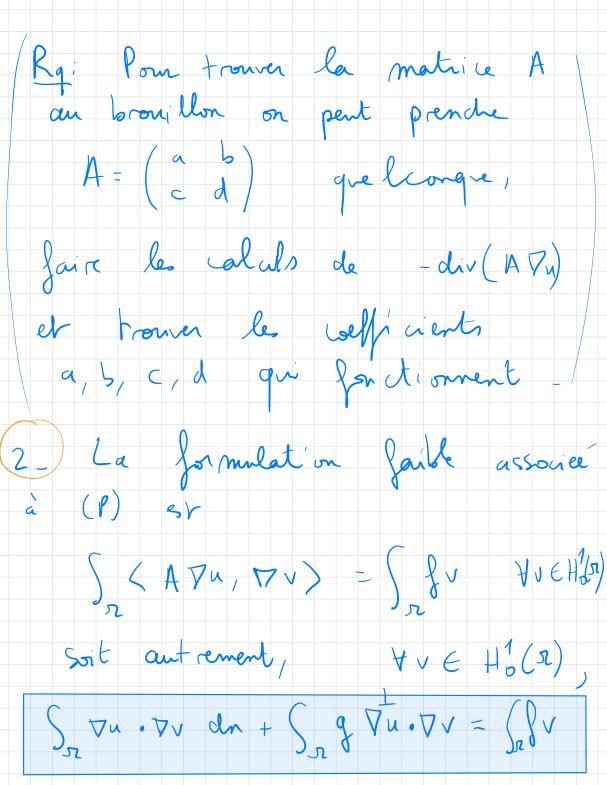
$$= - \left[\partial_1 u - \partial_1 g \partial_2 u - g \partial_3 \partial_4 u + \partial_3 u \right]$$

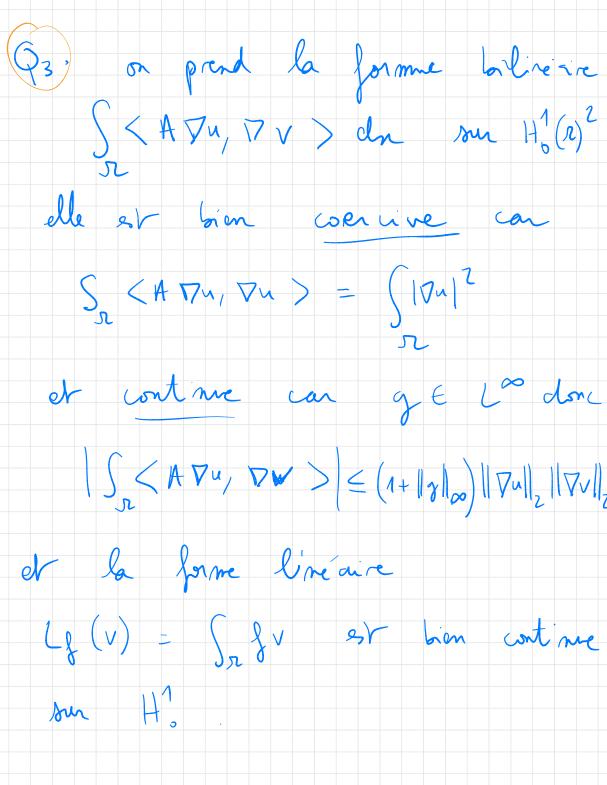
$$+ g \partial_3 \partial_4 u + \partial_3 u$$

$$+ g \partial_3 \partial_4 u + \partial_3 u \right]$$

$$= - \left[\Delta u - \nabla g \cdot \nabla u \right]$$

$$= - \Delta u + \nabla g \cdot \nabla u$$
Comme souhaite.





Donc d'après lax-Milgram il existe une solution faible (unique) Qui Non can A n'expas Supréhique Se minimiseur suggéné vé n'fie une autre equation, à savoir, - Du = } -(Q5) On part de la frimulation faible et on pend u g² comme fonction test. Comme u e Ho (e) et $g \in C^{\infty}(\overline{R})$ on a bien $ug^2 \in H^1(R)$

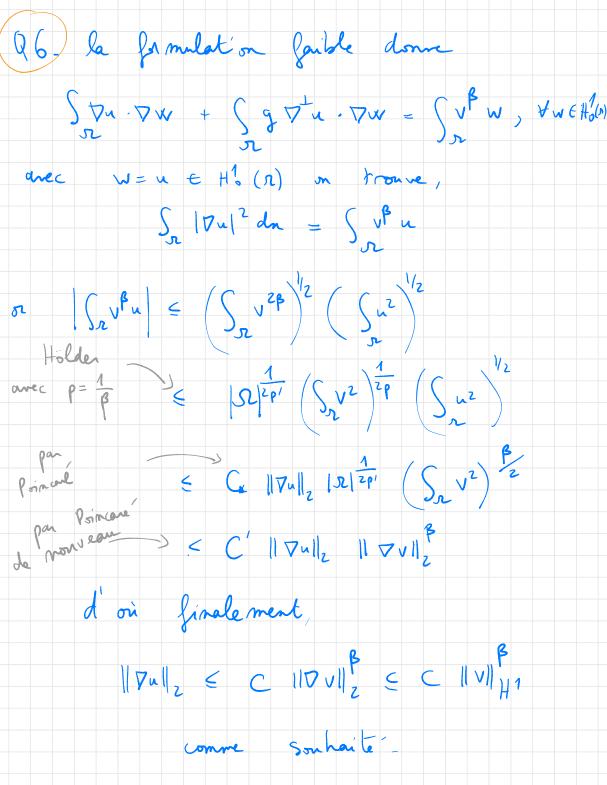
On en dé duit que S 7u·(g7u+2ug 7g) + g 7u·(g² √u+2ug √g) = 0 $\begin{array}{cccc}
 & = 0 \\
 & \Rightarrow u \cdot \forall u = 0
\end{array}$ Sig2 |Vul2 + Sizug Vu. Vg + Sig Vu. Zug Vg On procède ainsi; en utisant Canchy-Schwng et Young: $ab \leq \frac{\lambda}{2} a^2 + \frac{2}{\lambda} b^2$ $|I| \leq 2 \left(\int_{\mathcal{R}} q^2 |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{R}} u^2 |\nabla g|^2 \right)^{1/2}$ < 1 Seg2 | Du|2 + 4 Su2 | Dg | 2 Puin pour III), en remarquant que | Vul = IVul, $| I | \leq 2 \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \right|$ $\leq \lambda \int_{\mathcal{D}} g^{2} |\nabla u|^{2} + \frac{4}{\lambda} \int_{\mathcal{D}} u^{2} |\nabla g|^{2}$

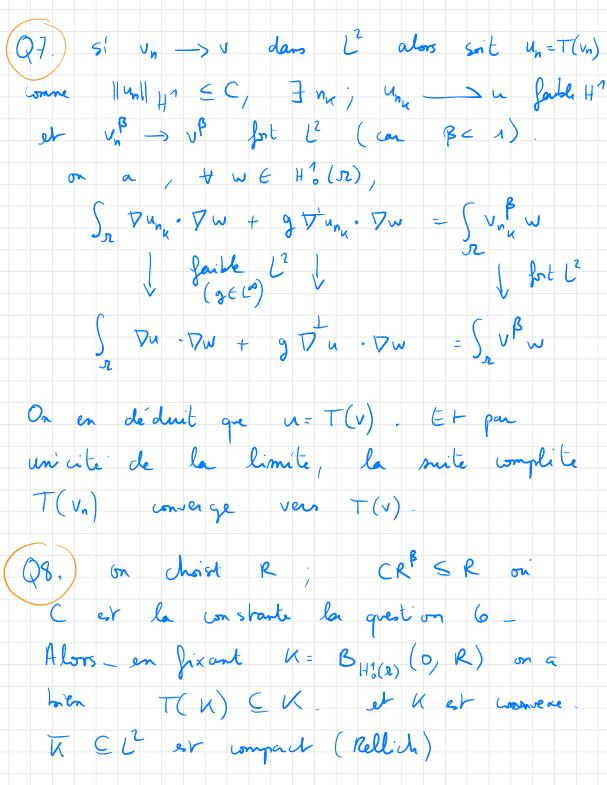
Aimsi,
$$\int_{R} g^{2} |\nabla u|^{2} dn \leq |\pm| + |\pm| |\pm|$$

$$\leq 2\lambda \int_{S_{2}^{2}} |\nabla u|^{2} + \frac{8}{\lambda} \int_{R} u^{2} |\nabla g|^{2}$$
Donc
$$(1-2\lambda) \int_{R} g^{2} |\nabla u|^{2} \leq \frac{8}{\lambda} \int_{R} u^{2} |\nabla g|^{2}$$

$$\Rightarrow \int_{R} g^{2} |\nabla u|^{2} dn \leq \frac{8}{\lambda(1-2\lambda)} \int_{R} u^{2} |\nabla g|^{2} dn$$
en pos ant $\lambda = \frac{1}{4}$ on tronve
$$\int_{S_{2}^{2}} |\nabla u|^{2} dn \leq \frac{8^{2}}{\lambda(1-2\lambda)} \int_{R} u^{2} |\nabla g|^{2} dn$$

$$\int_{S_{2}^{2}} |\nabla u|^{2} dn \leq \frac{8^{2}}{\lambda(1-2\lambda)} \int_{R} u^{2} |\nabla g|^{2} dn$$
(e qui ext l'inegal'te' re cher cheé.





et Ter bien contine (Q7). donc Tadmet un point fire dans K-Q9) Pour (V1, V2) € (H'O D LOO) on Considère (u1, u2) solution (S') $= \Delta u_2 + \nabla^{\dagger} v_1 \cdot \nabla u_2 = v_1 P$ on pose $E = L^2(r) \cap L^\infty(SZ)$ muni de 11-112 T, qui à (v1, v2) associe (u1, u2) solution de (S') Daprès Partie Z on a 11 u 211 H1 & C 1 V1 11 H1 donc si R er top que CRX ER et CRER on a bien (sous hypothèse (H)) que T(K) CK

où West le converse N:= B(0, R) 12° Il fant mainte nant ve i fin que T est cont me et T(u) st Compact. s; (v, n, v, n) et une mite de (L2 NL0) qui converge dans L² vers (v1, v2), alore en notant (u, v,") = T(v,", v,") et en ul; lisant la boron $||(u_n^n, u_2^n)||_{H^1} \leq C$ on peut extraire une sous-suite c. V faible ement en utilisant (H) on obtient une some uniforme sur Vy er V2 dans L'ace qui per met de parser à la limite dans la frimulation faible motamment dans le terme Sundun. Du ce qui montre la cont nuite. En fin pour la compacité or ut les Rellich

pour dire que de toute dans K on part extoire une sons-suite CV pour L2 et de fait que la l'inite et dans l'mage on déduit la borse Los de (H) ce qui montre la compacité de T(u).