Cours M2 - Équations Elliptiques linéaires du second ordre

Antoine Lemenant

12 janvier 2022

Table des matières

Introduction

Ce document rassemble des éléments correspondant au cours de M2 "Introduction aux équations linéaires elliptiques" donné à l'université de Lorraine (Nancy) au cours de l'année 2019-2020. Le but principal de ce texte est de fournir aux étudiants qui suivent le cours, un support contenant les démonstrations détaillés ainsi que la plupart des énoncés vu en cours (parfois trop rapidement, Hélas). Attention toutefois aux éventuelles erreurs que pourrait s'être glissées dans ce poly.... je n'ai pas tout relu à la lettre.

Pour toute remarque veuillez m'écrire à antoine.lemenant@univ-lorraine.fr

Références pour ce cours :

Zuily, "Théorie des distributions" livre paru chez Dunod
Evans, "Partial differential equations" livre édité par l'AMS
Brezis, "Analyse Fonctionelle" livre paru chez Dunod
Babadjian "EDP elliptiques linéaires et non linéaires" (poly de cours disponible à l'adresse : https ://www.math.u-psud.fr/∼babadjian/files/Poly-EDP-elliptiques2019.pdf)
Hervé Le Dret "Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires" Springer

Chapitre 1

Opérateur Laplacien

Dans ce chapitre nous voyons quelques propriétés de l'opérateur très important "Laplacien", à savoir :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 = \mathrm{div}\nabla.$$

En effet, il intervient dans de nombreuses EDP bien connues issues de la physique telles que les équations de Maxwell, Stokes, Laplace, Schrodinger, des ondes, de la chaleur, etc. Il est donc impératif de bien connaître cet opérateur ainsi que ses propriétés élémentaires. Deux équations élémentaires qui sont à la base de toutes les EDP dites "elliptiques" sont, le problème dit "de Laplace"

$$(L) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le problème dit "de Poisson"

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La fonction f dans ce cas est appelée "second membre". Les solutions à (L) seront toujours très régulières (C^∞, et même analytiques) tandis que la régularité d'une solution à (P) dépendra de celle de f.

1.1 Formule de la divergence et Green-Riemann

Dans cette section nous souhaitons donner un sens et démontrer rigoureusement la formule majeure et bien connue suivante, dite "de la divergence" ou encore "d'intégration par parties" :

$$\int_\Omega \mathrm{div}F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

pour un champ de vecteurs $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ régulier sur un domaine Ω régulier. Pour cela, nous avons besoin de définir l'intégrale sur le bord d'un domaine, ainsi que la normale extérieure. Nous le faisons ici de manière élémentaire et un peu pénible, mais nous verrons plus tard un autre point de vue pour démontrer cette formule, en utilisant la dérivée au sens des distributions de la fonction indicatrice du domaine Ω, faisant apparaître une mesure σ portée sur le bord, appelée parfois "mesure superficielle" ou "mesure de surface".

Définition 1 (Ouvert C^k)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe*

- *un $r > 0$*
- *un système d'axes de coordonnées $\{e_1, \dots, e_N\}$*
- *une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k*

tels que

$$\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) \,:\, y_N < \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})\},$$

$$\partial\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) \,:\, y_N = \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})\},$$

$Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N \,:\, |y_i - x_i| < r$ pour tout $1 \le i \le N\}$. Si $k \ge 1$, la normale unitaire extérieure à Ω en $y = (y_1, \dots, y_{N-1}, \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})) = (y', \gamma(y')) \in \partial\Omega \cap Q_r(x)$ est bien définie et est donnée par

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|}}(-\nabla\gamma(y'), 1).$$

De plus si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, l'intégrale de bord de φ sur $\partial\Omega \cap Q_r(x)$ est définie par

$$\int_{\partial\Omega \cap Q_r(x)} \varphi \, d\sigma := \int_{x' +]-r,r[^{N-1}} \varphi(y', \gamma(y'))) \sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|^2} dy'.$$

Si Ω est borné, alors $\partial\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. On peut donc trouver un recouvrement fini de $\partial\Omega$ par des cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$. Si $\theta_1, \dots, \theta_m$ est une partition de l'unité associée à $Q_1, \dots, Q_m$, c'est à dire :

- pour tout $1 \le i \le m$, $\theta_i \in C_c^\infty(Q_i)$ et $0 \le \theta_i \le 1$;
- $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$

alors on définit

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega \cap Q_i} \theta_i \varphi \, d\sigma.$$

On peut montrer que cette quantité est indépendante du choix de la paramétrisation γ, du recouvrement (Q_i) et de la partition de l'unité (θ_i). Ceci permet de définir une mesure "de surface", ou "mesure superficielle", notée σ, portée par le bord de Ω. Par exemple, dans le cas des ouverts de classe C^1, cette mesure coïncide aussi avec la mesure de Hausdorff traditionnellement notée $\mathcal{H}^{N-1}$ que l'on peut rencontrer dans certains ouvrages.

Théorème 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 et $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\boxed{\int_\Omega \mathrm{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma.}$$

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe C^1 dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ alors

$$\int_\Omega \nabla f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu \, d\sigma.$$

Démonstration. (voir cours) □

Il existe d'autres versions bien utiles découlant directement de cette formule.

Corollaire 1 (Formules de Green)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné de classe C^1 et $u, v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 dans un voisinage de Ω. Alors*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u\, d\sigma$$

et

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma$$

Démonstration. Pour la première formule de Green, on applique le théorème de la divergence au champ de vecteurs $F = v\nabla u$. Pour la deuxième formule de Green, on applique, la première formule de Green deux fois. □

1.2 Fonctions harmoniques

Définition 2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique dans Ω si elle est solution de l'équation de Laplace, c'est à dire*

$$\Delta u(x) = 0 \quad \textit{pour tout } x \in \Omega.$$

Nous verrons plus tard que l'hypothèse $u \in C^2$ est superflue. En effet, pour être harmonique, il suffit que l'équation $\Delta u = 0$ soit satisfaite au sens des distribution.
Dans la suite, ω_N désigne le volume (la mesure de Lebesgue) de la boule unité. Le volume de la sphère unité est $\sigma(\partial B_1) = N\omega_N$. On utilisera la notation $⨍$ pour désigner la moyenne, c'est à dire

$$⨍_A f\, d\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu.$$

Autrement dit,

$$⨍_{B(x,r)} f\, dx = \frac{1}{r^N\omega_N} \int_{B(x,r)} f\, dx \quad \text{et} \quad ⨍_{\partial B(x,r)} f\, d\sigma = \frac{1}{r^{N-1}N\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} f\, d\sigma.$$

Proposition 1 (Formule de la moyenne)**.** *Si $u \in C^2(\Omega)$ est une fonction harmonique alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$ on a*

$$u(x_0) = ⨍_{B(x_0,r)} u\, dx = ⨍_{\partial B(x_0,r)} u\, d\sigma.$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. On pose alors

$$f(r) = ⨍_{\partial B(0,r)} u(x)\, d\sigma(x) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(ry)\, d\sigma(y),$$

où l'on a utilisé un changement de variables pour la deuxième inégalité. Ce qui permet de calculer $f'(r)$ comme

$$f'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} \nabla u(ry) \cdot y\, d\sigma(y).$$

En revenant à $\partial B(0, r)$ par le même changement de variables on trouve

$$f'(r) = ⨍_{\partial B(0,r)} \nabla u(x) \cdot \frac{x}{r}\, d\sigma(x) = ⨍_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

car d'après la formule de Green

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_{B_r} \Delta u \, d\sigma = 0.$$

On en déduit que f est constante, et comme u est C^2 on peut facilement montrer que

$$\lim_{r\to 0} f(r) = u(0),$$

ce qui termine la preuve de la première formule de la moyenne.
La deuxième formule de la moyenne découle de la première en écrivant que

$$\int_{B(x_0,r)} u(x)\, dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0,t)} u(x)\, d\sigma \right) dt = u(x_0) \int_0^r t^{N-1} N\omega_N d\sigma = r^N \omega_N u(x_0),$$

ce qui termine la preuve. □

Proposition 2 (Réciproque à la formule de la moyenne). *Si $u \in C^2(\Omega)$ satisfait*

$$u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u \, d\sigma$$

pour toute boule $B(x_0, r) \subset \Omega$, alors u est harmonique.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que, disons, $\Delta u(x_0) > 0$. Alors comme u est C^2, par continuité, il existe une boule $B(x_0, r)$ et un $\varepsilon > 0$ telle que $\Delta u \geq \varepsilon > 0$ sur $B(x_0, r)$. Mais alors en notant f la fonction comme dans la preuve de la proposition 1 on obtient

$$0 = f'(r) = \fint_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{r}{N} \int_{B(0,r)} \Delta u(u)\, dy > 0,$$

ce qui est absurde. □

Proposition 3 (Principe du maximum). *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique.*

i) Alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) De plus, si Ω est connexe et s'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$, alors u est constante.

Démonstration. Il suffit de montrer *ii*) car elle entraine *i*). Supposons que Ω soit connexe et qu'il existe un $x_0 \in \Omega$ qui atteigne $M := \max_{\overline{\Omega}} u$. Alors pour $0 < r < dist(x_0, \partial\Omega)$, la propriété de la moyenne entraine

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u \, dx \leq M.$$

Pour avoir égalité, il faut et il suffit que $u(x) = M$ pour tout $x \in B(x_0, r)$. Donc l'ensemble $E := \{x \in \Omega \ : \ u(x) = M\}$ est à la fois ouvert et fermé dans Ω, on a donc $E = \Omega$ (car Ω est connexe), et u est constante. □

Corollaire 2 (Unicité pour Poisson). *Soit $g \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C^0(\Omega)$. Alors il existe au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ pour le problème de Poisson suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Démonstration. Si u et v sont deux solutions dans $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, alors $u - v$ est harmonique et vaut 0 sur le bord. En appliquant le principe du maximum on obtient $u - v \leq 0$ dans Ω. En raisonnant de même avec $v - u$ on a également $v - u \leq 0$ donc finalement $u - v = 0$ dans Ω. $\square$

Théorème 1.2 (Régularité des fonctions harmoniques)**.** *Si $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. On utilise une régularisation par convolution. Soit ρ_ε une approximation de l'unité qui est radiale (c'est à dire $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-N}\rho(|x|/\varepsilon)$ avec ρ une fonction réelle supportée dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{B(0,1)} \rho(|x|)dx = 1$). Alors $u^\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ est une fonction C^∞ dans l'ouvert $\Omega \cap \{x : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{B(x,\varepsilon)} \rho(\frac{|x-y|}{\varepsilon})u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_0^\varepsilon \rho(\frac{r}{\varepsilon})\left(\int_{\partial B(x,r)} u\,d\sigma\right)\,dr \\
&= u(x)\frac{1}{\varepsilon^N}\int_0^\varepsilon \rho(\frac{r}{\varepsilon})N\omega_N r^{N-1}dr \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Donc $u^\varepsilon(x) = u(x)$ et on en déduit que u est C^∞ dans l'ouvert Ω. $\square$

Remarque 1. *On verra plus tard un théorème plus fort que, si $\Delta u = 0$ au sens des distributions, alors $u \in C^\infty(\Omega)$. Et en réalité, les fonctions harmoniques sont plus régulières que C^∞, ce sont des fonctions analytiques.*

Théorème 1.3 (Estimation des dérivées)**.** *Si $u \in C^\infty(\Omega)$ est harmonique alors pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ on a*

$$\boxed{|\partial_{x_i}u(x)| \leq \frac{C}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{C}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(B(x,r))}.}$$

Il en découle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$|\partial^\alpha u| \leq \frac{C_k}{r^{N+k}}\int_{B(x,r)} |u|\,dy,$$

où $k = |\alpha|$.

Démonstration. Si u est harmonique alors $\partial_{x_i}u(x)$ est aussi harmonique ! La formule de la moyenne appliquée à $\partial_{x_i}u$, puis une intégration par partie donne donc

$$|\partial_{x_i}u(x_0)| = \left|\fint_{B(x_0,r/2)} \partial_{x_i}u\,dx\right| = \left|\frac{2^N}{\omega_N r^N}\int_{\partial B(x_0,r/2)} u\nu_i\,d\sigma\right| \leq \frac{C}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))}.$$

Enfin, par la formule de la moyenne sur u on a

$$|u(x)| \leq \frac{C}{r^N}\int_{B(x,r/2)} |u|dy \leq \frac{C}{r^N}\|u\|_{L^1(B(x,r))},$$

ce qui montre $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,\frac{r}{2}))} \leq \frac{C}{r^N}\|u\|_{L^1(B(x,r))}$ et termine la preuve. $\square$

Théorème 1.4 (Liouville)**.** *Si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est harmonique et bornée, alors u est constante.*

Démonstration. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Pour $r > 0$ on a

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq \frac{C'}{r},$$

et on conclut que $\nabla u = 0$ en faisant $r \to +\infty$. $\square$

Corollaire 3. *Si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est harmonique et tend vers 0 à l'infini alors u est nulle.*

1.3 Énergie de Dirichlet et introduction à la méthode variationnelle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier et $u \in C^2(\overline{\Omega})$. On appelle énergie de Dirichlet la quantité :

$$E(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Soit $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et soit

$$\mathcal{A} := \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ \text{telle que } u = g \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Il existe un lien très fort entre les minimiseurs de l'énergie de Dirichlet, et l'équation suivante, dite "de Laplace" :

$$(L)\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si bien qu'une méthode possible pour résoudre cette équation et montrer qu'il existe une solution, est justement de minimiser l'énergie de Dirichlet. C'est la méthode dite "variationnelle" que nous verrons plus tard, et qui utilise les Espaces de Sobolev. Avant cela, vérifions simplement l'équivalence en admettant l'existence.

Proposition 4. *Soit $u \in \mathcal{A}$ une solution de l'equation (L). Alors u est solution du problème de minimisation*

$$\min_{u \in \mathcal{A}} E(u). \tag{1.1}$$

(on dit dans ce cas que c'est un minimiseur de Dirichlet). Réciproquement, si $u \in \mathcal{A}$ est une solution pour le problème de minimisation (1.1), alors c'est une solution pour le problème de Laplace (L).

Démonstration. Soit $w \in \mathcal{A}$ quelconque. Alors d'après la formule de la divergence,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(u-w)\, dx = -\int_\Omega (u-w)\Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(u-w)\, d\sigma = 0.$$

Autrement dit, les fonctions ∇u et $\nabla(u-w)$ sont orthogonales dans L^2. On en déduit donc d'après Pythagore

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla(u-w)|^2 \, dx.$$

Il en résulte que $E(u) \leq E(w)$, donc u est un minimiseur de Dirichlet.

Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{A}$ soit un minimiseur de Dirichlet. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors pour tout $t > 0$ la fonction $u + t\varphi \in \mathcal{A}$. Donc la fonction $E(u + t\varphi)$ de la variable réelle t admet un minimum en $t = 0$. Si cette fonction est dérivable on doit avoir

$$\frac{d}{dt} E(u + t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

On appelle cette équation “Equation d'Euler-Lagrange”. Dans le cas de l'énergie de Dirichlet, on peut simplement raisonner de la manière suivante. Tout d'abord on développe

$$E(u + t\varphi) = \int_\Omega |\nabla u + t\varphi|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 + 2t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

Puis on dit que u est un minimiseur donc

$$E(u) \leq E(u + t\varphi) = E(u) + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + t^2 E(\varphi) \tag{1.2}$$

par suite on obtient

$$0 \leq 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + t^2 E(\varphi).$$

En divisant par $t > 0$ et en faisant $t \to 0$ on montre que

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Puis, en reprenant l'expression dans (1.2), en divisant cette fois par $t < 0$ et en faisant $t \to 0$ on obtient l'inégalité inverse ce qui montre au final que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_\Omega \varphi \Delta u \, dx = 0.$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction φ et que Δu est continue par hypothèse, il en découle que $\Delta u = 0$ et u est donc bien solution du problème (L). $\square$

Chapitre 2

Théorie des distributions et solution élémentaire

Dans ce chapitre nous revoyons quelques éléments sur la théorie des distributions. Notre principal intérêt et de pouvoir étendre la notion de dérivée au sens classique, à des fonctions non régulières, qui sont seulement L^1_{loc}. On parle alors de dérivée “au sens faible”.

2.1 Rappels succincts sur la théorie des distributions

Notation : pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ qui désigne un multi-indice, on note alors ∂^α la dérivée d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ définie par

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N}.$$

Pour un esemble $A \subset \mathbb{R}^N$ on désigne par $C_c^\infty(A)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans A.
Un espace important est l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Définition 3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Une distribution T sur Ω est une application linéaire de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :*

pour tout compact K de Ω il existe $C_K > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour toute $\varphi \in C_c^\infty(K)$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.

Remarques :

1. Il existe une topologie (localement convexe) sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour laquelle la notion de distribution coïncide avec les formes linéaires continues. Cette topologie ne provient pas d'une norme, mais est engendrée par la famille de semi-normes $(p_{K,n})$ suivante

$$p_{K,n}(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

   Il n'est pas utile de connaître les détails de cette topologie au niveau de ce cours.

2. **Remarque importante !** Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution T_f au travers de la formule

$$\boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx}.$$

En effet, $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi\, dx$ est bien linéaire, et si φ est à support dans le compact K on a l'inégalité

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |f||\varphi|dx \leq \|f\|_{L^1(K)} \sup_{x\in K} |\varphi(x)|,$$

On peut montrer que $f \mapsto T_f$ est injective. Dans la suite on prendra donc souvent l'habitude d'identifier f et T_f en utilisant la même notation f.

3. Un exemple de distribution T qui n'est pas une fonction L^1_{loc} est la distribution de Dirac, définie par

$$\langle T, \varphi \rangle := \varphi(0).$$

Cette distribution est en réalité une mesure, on la note traditionnellement δ_0.

4. Plus généralement, toute mesure borellienne localement finie (mesure de Radon) définit une distribution au travers de la formule

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_\Omega f\, d\mu,$$

car pour φ supportée dans K on a

$$|\int_\Omega f\, d\mu| \leq \mu(K) \sup_{x\in K} |f(x)|. \tag{2.1}$$

On remarque que c'est une distribution "d'ordre 0", c'est à dire qui ne fait intervenir aucune dérivée de φ dans l'inégalité (2.1). On peut montrer qu'en réalité, toutes les distributions d'ordre 0 sont représentables par des mesures de Radon.

5. L'espace des distributions ne forme pas une algèbre, c'est à dire que l'on ne peut pas multiplier deux distributions entre elles. En revanche, on peut multiplier une distribution T avec une fonction f de classe C^∞. En effet, pour toute $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ la fonction $f\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ et donc la définition suivante à bien un sens : $\langle T, f\varphi \rangle$. Ceci permet de définir la distribution fT par la formule

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle.$$

On remarque que cette définition coïncide avec la multiplication au sens classique dans le cas des fonctions L^1_{loc}.

2.2 Dérivée au sens des distributions

Dans ce cours, nous utiliserons les distributions principalement pour définir la dérivée au sens faible. Ceci permet d'étendre la notion de dérivée au sens classique, à des fonctions peu régulières telles que des fonctions $f \in L^1_{loc}$.

Définition 4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $C^\infty_c(\Omega)$ définie par*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle := -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega),$$

est une distribution appelée dérivée partielle, au sens des distributions, de T.

Remarques :

1. Il découle de la définition qu'une distribution admet des dérivées de tout ordre. En effet, pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a
$$\boxed{\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)}.$$
2. Un exemple important est le cas d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, admettant une dérivée aussi dans $L^1_{loc}(\Omega)$. La fonction $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée partielle de f au sens des distributions (on dit aussi, "au sens faible") si pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a
$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g\varphi\, dx.$$

Exercices (voir feuilles de TD) :

— Calculer la dérivée de la mesure de Diract δ_0 au sens des distributions.

— Calculer la dérivée de la fonction de Heaviside $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

— Calculer la dérivée de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ pour f dans L^1_{loc}.

— Montrer que si $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ alors T est constante.

— Retrouver la formule de la divergence en calculant la dérivée normale de $\mathbf{1}_\Omega$.

2.3 Convergence d'une suite de distributions

Définition 5. *On dit qu'une suite (T_k) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si*
$$\lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Propriétés :

1. Si $T_j \to T$ alors, pour tout α, $\partial^\alpha T_j \to \partial^\alpha T$
2. Exemple : $f_j := \sqrt{j} e^{-jx^2}$ converge vers $\sqrt{\pi}\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ on a, d'après le théorème de convergence dominée,
$$\langle f_j, \varphi \rangle = \sqrt{j} \int_{\mathbb{R}} e^{-jx^2} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi(\frac{y}{\sqrt{j}}) \to \sqrt{\pi}\varphi(0) = \sqrt{\pi}\langle \delta_0, \varphi \rangle.$$
3. Si $f_k \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$ alors $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
4. Si $f_k \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.4 Rappel : produit de convolution de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

Nous souhaitons définir le produit de convolution d'une distribution avec une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Avant cela, nous voyons rapidement quelques propriétés du produit de convolution d'une fonctions L^1_{loc} avec une fonction C^∞.

Définition 6. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \le p \le +\infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et on pose*
$$\boxed{f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy.}$$

Proposition 5. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a*

$$\boxed{\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g.}$$

De plus,

$$\boxed{Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}.}$$

Définition 7 (suite régularisante)**.** *Une suite régularisante (ρ_n) est une suite de la forme $\rho_n(x) = \frac{1}{n^N}\rho(nx)$ où $\rho \in C_c^\infty(B(0,1))$ vérifie $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$ et $\rho \geq 0$.*

Théorème 2.1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (en particulier, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ d'après l'inégalité de Hölder), $1 \leq p < +\infty$, et (ρ_n) est une suite régularisante, alors $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et*

$$\boxed{f * \rho_n \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Remarque 2. *Attention, la régularisation ne fonctionne pas pour $p = +\infty$. Sauf si f est continue, dans ce cas il est vrai que $f * \rho_n$ converge uniformément (sur tous compacts) vers f.*

2.5 Produit de convolution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

Notation : pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on note $\check{\varphi}$ la fonction $x \mapsto \varphi(-x)$ et pour $a \in \mathbb{R}^N$ fixé on note aussi $\tau_a\varphi$ la fonction $x \mapsto \varphi(x - a)$. Par exemple

$$\tau_x\check{\varphi}(y) = \check{\varphi}(y - x) = \varphi(x - y),$$

de sorte que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\tau_x\check{\varphi}(y)\, dy = \langle T_f, \tau_x\check{\varphi}\rangle.$$

En s'inspirant de cette expression, on peut définir la convolution de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ avec une fonction C_c^∞ de la manière suivante.

Définition 8 (Convolution de $\mathcal{D}'$ avec C_c^∞)**.** *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty$ on définit $T * \varphi(x)$ par*

$$T * \varphi(x) := \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle.$$

Théorème 2.2. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et*

$$\boxed{\partial^\alpha(T * \varphi) = T * \partial^\alpha\varphi = \partial^\alpha T * \varphi \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Par récurrence sur $|\alpha|$, il suffit de vérifier que $T * \varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et (2.2) est vrai pour $|\alpha| = 1$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Rappel : la formule de Taylor à l'ordre 2 donne, pour $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$,

$$f(x_0 + ah) - f(x_0) = h\sum_{j=1}^N a_j\partial_j f(x_0) + h^2\int_0^1 (1 - t)\sum_{i,j} a_i a_j \partial^2_{ij} f(x_0 + ath)dt.$$

Donc, pour $a, y \in \mathbb{R}^N$, $h \in [0, 1]$, $|a| \leq 1$ on a

$$\varphi(x_0 + ah - y) - \varphi(x_0 - y) = h\sum_{j=1}^N a_j\partial_j\varphi(x_0 - y) + h^2 R(y, h),$$

où $R(y,h)$ est C^∞ en a, y et h. De plus $R(y,h)$ est à support compact en y.
Donc

$$T * \varphi(x_0 + ah) - T * \varphi(x_0) - h \sum_{j=1}^{N} a_j (T * \partial_j \varphi)(x_0) = h^2 \langle T, R(\cdot, h) \rangle.$$

Mais par la définition de distribution, pour tout $K \subset \mathbb{R}^N$ compact il existe C_K et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour toute $\varphi \in C_c^\infty(K)$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{x \in K, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Donc $\langle T, R(\cdot, h) \rangle \in O(1)$ c'est à dire uniformément borné en $h \in [0,1]$ pour tout $|a| \leq 1$. On en déduit que $T * \varphi$ est différentiable en x_0 et que ses dérivées partielles valent

$$\partial_i (T * \varphi)(x_0) = T * \partial_i \varphi(x_0).$$

En appliquant l'argument ci-dessus pour $\partial_i \varphi$ on sait que $T * \partial_i \varphi$ est continue en x_0 (et différentiable en x_0). Pour montrer la deuxième égalité on utilise l'identité,

$$\partial_j \tau_x \check{\varphi} = \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(x - y) = -\tau_x \check{\partial_i \varphi}$$

et on applique la définition de dérivée au sens des distributions ce qui donne directement

$$\partial^\alpha T * \varphi(x) = \langle \partial^\alpha T, \tau_x \check{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \tau_x \check{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_x (\check{\partial^\alpha \varphi}) \rangle = T * \partial^\alpha \varphi(x), \tag{2.3}$$

et termine la preuve de la proposition. □

Exercice 1. *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et ρ_n est une approximation de l'unité, alors $T * \rho_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

2.6 Distributions à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$

Définition 9 (Support d'une distribution)**.** *Si $V \subset \Omega$ est ouvert, on note $T|_V$ la restriction de T à V, c'est à dire la distribution de $\mathcal{D}'(V)$ induite par T de façon évidente. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on appelle support de T l'ensemble $\Omega \setminus V$, où V est le plus grand ouvert tel que $T|_V = 0$. On note $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ les distributions dont le support est compact.*

Remarque 3. *Si $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ alors T se prolonge en une forme linéaire sur $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ de la manière suivante : soit K le support de T et soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction plateau qui vaut 1 sur un voisinage de K. Alors pour $\varphi \in C^\infty$ (pas forcément à support compact), on définit $\langle T, \varphi \rangle$ par*

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \chi\ \varphi \rangle.$$

On montre aisément que cette définition a bien un sens, c'est à dire que la valeur de $\langle T, \varphi \rangle$ ne dépend pas du choix de la fonction plateau χ choisie car, si χ' est une autre fonction plateau, $\chi - \chi'$ est supportée en dehors du support de T de sorte que $\langle T, (\chi - \chi')\varphi \rangle = 0$.

Proposition 6. *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ alors $S * \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. □

2.7 Produit de convolution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ on définit $\check{T}$ par

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle := \langle T, \check{\varphi}\rangle.$$

Si $S \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, la proposition 6 entraine que $\check{S} * \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, ce qui justifie la définition suivante.

Définition-Proposition 1. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ on définit le produit de convolution $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ par*

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \langle T, \check{S} * \varphi\rangle, \qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Le crochet $\langle T, \check{S} * \varphi\rangle$ est bien définit pour tout φ en vertu de la proposition 6. Montrons que cela définit bien une distribution. Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact, $\varphi \in C_c^\infty(K)$, et soit K_0 le support de $\check{S}$. La fonction $\check{S} * \varphi$ est supportée dans $K' := K + K_0$, et comme T est une distribution il vient

$$\begin{aligned}
|\langle T * S, \varphi\rangle| = |\langle T, \check{S} * \varphi\rangle| \leq C_{K'} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\partial^\alpha(\check{S} * \varphi)| &= C_{K'} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\check{S} * (\partial^\alpha\varphi)|. \\
&= C_{K'} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\langle \check{S}, \tau_x(\check{\partial^\alpha\varphi})\rangle|. \\
&\leq C'_{K'} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\partial^\alpha\varphi(x)|,
\end{aligned}$$

car $\check{S}$ est une distribution à support compact. Ceci montre bien que $T * S$ est une distribution. □

Proposition 7. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $S \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a*

$$\partial^\alpha(T * S) = \partial^\alpha T * S.$$

Démonstration. Soit φ une fonction test. On écrit successivement,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(T * S), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T * S, \partial^\alpha\varphi\rangle \quad (\text{par définition de la dérivée dans } \mathcal{D}') \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \check{S} * \partial^\alpha\varphi\rangle \quad (\text{par définition de la convolution } \mathcal{D}') \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha(\check{S} * \varphi)\rangle \quad (\text{par le théorème 2.2}) \\
&= \langle \partial^\alpha T, \check{S} * \varphi\rangle \quad (\text{encore par définition de la dérivée}) \\
&= \langle \partial^\alpha T * S, \varphi\rangle \quad (\text{encore par définition de la convolution dans } \mathcal{D}')\ ,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Exemple 1 (Important)**.** *Soit $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ la distribution de Dirac, et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Alors $T * \delta_0 = T$. En effet, on remarque tout d'abord que $\check{\delta_0} = \delta_0$ car*

$$\langle \check{\delta_0}, \varphi\rangle := \langle \delta_0, \check{\varphi}\rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(0).$$

Par suite, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\check{\delta_0} * \varphi(x) := \langle \delta_0, \tau_x\check{\varphi}\rangle = \varphi(x-y)|_{y=0} = \varphi(x).$$

On en déduit donc que

$$\langle T * \delta_0, \varphi\ \rangle := \langle T, \check{\delta_0} * \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,$$

ce qui montre bien que $T * \delta_0 = T$.

Remarque 4. *Si $S \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C^\infty$ (pas forcément à support compact), alors on a bien $S * \varphi = \langle S, \tau_x\check{\varphi}\rangle$ et une variante de la proposition 2.2 montre que $S * \varphi$ est de classe C^∞.*

2.8 Solution élémentaire et application à l'équation de Poisson

Définition 10. *Un opérateur différentiel à coefficients constants est une somme finie de dérivées de le forme* $P = \sum_{i=0}^{D} a_i \partial^{\alpha_i}$ *avec* $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. L'opérateur* P *s'applique sur une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *par*

$$P(T) = \sum_{i=0}^{D} a_i \partial^{\alpha_i} T$$

Définition 11 (Solution élémentaire)**.** *Soit* P *un opérateur différentiel à coefficients constants. On appelle solution élémentaire (ou solution fondamentale) de* P*, une distribution* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *qui vérifie*

$$\boxed{P(E) = \delta_0}$$

Théorème 2.3 (Malgrange-Ehrenpreis (1955))**.** *Tout opérateur* P *a coefficients constants admet une solution élémentaire.*

Proposition 8. *Supposons que* P *admette une solution élémentaire* E*. Alors pour toute distribution* $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ *à support compact, il existe une solution* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *à l'équation*

$$P(T) = S.$$

Démonstration. Il suffit de prendre $T = E * S$. Dans ce cas, en utilisant la Proposition 7 on obtient $P(T) = P(E * S) = P(E) * S = \delta_0 * S = S$. □

Proposition 9 (Solution élémentaire pour le Laplacien)**.** *L'opérateur* Δ *admet les solutions élémentaires suivantes :*

- *si* $N = 1$ $\quad E(x) = \max(x, 0)$.
- *si* $N = 2$ $\quad E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$
- *si* $N \geq 3$ $\quad E(x) = -\frac{C_N}{|x|^{N-2}}$ *avec* $C_N = \frac{1}{(N-2)\sigma(\mathbb{S}^{N-1})}$.

Démonstration. (voir cours) □

Théorème 2.4. *Pour toute distribution* $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ *à support compact, il existe une solution à l'équation* $\Delta T = S$ *dans* $\mathbb{R}^N$*. Celle-ci est donnée par* $T = E * S$*. En dehors du support de* S*, c'est une fonction* C^∞ *qui tend vers* 0 *à l'infini.*

Remarque 5. *La solution à* $\Delta T = S$ *n'est en général pas unique (on peut ajouter par exemple n'importe quelle fonction harmonique).*

Démonstration du Théorème 2.4. On a

$$\Delta(E * S) = \Delta(E) * S = \delta_0 * S = S$$

ce qui montre bien que $\Delta(T) = S$. Montrons que T est de classe C^∞. Soit φ une fonction plateau C^∞ supportée sur $\{|x| \leq \varepsilon\}$ telle que $\varphi = 1$ sur $\{|x| \leq \varepsilon/2\}$. On a

$$E * S = [(1 - \varphi)E] * S + (\varphi E) * S.$$

De l'expression explicite de E on sait que $(1-\varphi)E \in C^\infty$. Ceci implique donc d'après la remarque 4,

$$[(1-\varphi)E] * S \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Maintenant, on a $supp((\varphi E) * S) \subset B(0,\varepsilon) + supp(S) = K_\varepsilon$. Donc pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon)$, on a $\psi(E * S) = \psi([(1-\varphi)E] * S) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. C'est à dire, puisque ε est arbitraire,

$$E * S|_{\mathbb{R}^N \setminus supp(S)} \in C^\infty.$$

Montrons maintenant que $E * S$ tend vers 0 à l'infini. Pour cela on utilise l'expression explicite de $E * S$ en dehors de K_ε (car c'est une fonction C^∞), précisément, pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon$, en notant $F = (1-\varphi)E$ qui est C^∞ on obtient

$$E * S(x) = F * S(x) = \langle S, \tau_x \check{F} \rangle$$

et (disons pour $N \geq 3$, mais l'argument est analogue pour $N = 1$ et $N = 2$)

$$\tau_x \check{F}(y) = (1 - \varphi(x-y)) \frac{C_N}{|x-y|^{N-2}}$$

Maintenant on utilise que S est une distribution ce qui donne

$$|E*S(x)| = |\langle S, \tau_x \check{F} \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in supp(S)} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y} \left(\frac{1-\varphi(x-y)}{|x-y|^{N-2}} \right) \right| = C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in supp(S)} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) \right|$$

car $\varphi(x-y) = 0$ pour $|x|$ grand. Ce qui montre que $\lim_{|x| \to +\infty} |E * S(x)| = 0$. □

On en déduit maintenant le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.5 (Régularité du Laplacien)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\Delta T = f$. Alors $T \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Choisissons $\chi \in C_c^\infty(B(x_0, 2r))$ une fonction plateau telle que $\chi = 1$ sur $B(x_0, 3r/2)$. Montrons que $\chi T \in C^\infty$.
On a $\chi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ donc

$$\chi T = \delta_0 * (\chi T) = \Delta(E) * (\chi T) = E * (\Delta(\chi T)) = E * (\chi \Delta T) + E * (\Delta(\chi T) - \chi \Delta T).$$

Comme $\chi \Delta T \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a $E * (\chi \Delta T) \in C^\infty$. Par ailleurs,

$$\Delta(\chi T) - \chi \Delta T = 2 \nabla \chi \cdot \nabla T + T \Delta \chi$$

et $\Delta \chi = 0$ et $\nabla \chi = 0$ sur $B(x_0, 3r/2)$. Donc

$$supp(\Delta(\chi T) - \chi \Delta T) \subset \mathbb{R}^N \setminus B(x_0, 3r/2).$$

Par le théorème précédent, $E * (\Delta(\chi T) - \chi \Delta T)$ est C^∞ sur $B(x_0, r)$. □

Corollaire 4. *Si $\Delta T = 0$ sur Ω, au sens des distributions, alors $T \in C^\infty(\Omega)$ est une fonction harmonique.*

Corollaire 5. *Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $E * S$ est l'unique solution de l'équation $\Delta T = S$ qui tend vers 0 à l'infini.*

Démonstration. On sait déjà que $E * S$ est une fonction en dehors du support de S, qui tend vers 0 à l'infini. Soit T' une autre solution. Alors $T - T'$ est une fonction harmonique, et tend vers 0 à l'infini. D'après le théorème de Liouville (Corollaire 3), $T - T'$ nulle. □

Chapitre 3

Distributions tempérées et résolution en Fourier dans $H^s(\mathbb{R}^N)$

Les distributions étaient obtenues à partir de la dualité avec l'espace $C_c^\infty(\Omega)$. Or cet espace n'est pas invariant par transformation de Fourier. C'est pourquoi, afin de définir la transformée de Fourier d'une distribution, il convient d'augmenter cet espace en un espace plus grand, l'espace de Schwarz (fonctions C^∞ à décroissance rapide), qui sera bien invariant par Fourier. La dualité sur cet espace plus grand donne naissance aux distributions "tempérées".

3.1 Espace de Schwarz et transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 12. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ou simplement noté $\mathcal{S}$) est constitué des fonctions $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \forall \beta \in \mathbb{N}^N, \quad \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha u(x)| \leq C_{\alpha,\beta}.$$

On dit que u est à "décroissance rapide" ainsi que toutes ses dérivées. Par exemple :

— $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

— $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Quelques propriétés (admises) :

1. $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel métrisable complet muni des semi-normes
$$p_{\alpha,\beta}(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta \partial^\alpha u(x)|.$$
(on dit que c'est un "espace de Fréchet"). Une suite (u_n) converge vers v dans $\mathcal{S}$ si et seulement si $p_{\alpha,\beta}(u_n - v) \to 0$ pour tout α, β.
2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}$.
3. Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$
4. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$.

Définition 13. *Pour tout $u \in \mathcal{S}$ la transformée de Fourier de u, que l'on note $\hat{u}$ ou bien $\mathcal{F}u$ est la fonction sur $\mathbb{R}^N$ définie par*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\, u(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Exercice : Soit $\lambda > 0$. Montrer que $u(x) = e^{-\lambda|x|^2} \in \mathcal{S}(R^N)$ et que $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\right)^N e^{\frac{-|\xi|^2}{4\lambda}}$.

Théorème 3.1. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$. Son inverse est donné par*

$$\mathcal{F}^{-1}(v)(x) = \overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\, v(\xi)\, d\xi.$$

Démonstration. Montrons que $\mathcal{F}(u)$ est C^∞. Pour x fixé la fonction $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}u(x)$ est C^∞ et $|\partial_\xi^\beta(e^{-ix\cdot\xi}u(x))| = |(-ix)^\beta e^{ix\cdot\xi}u(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ car $u \in \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{F}(u) \in C^\infty$ et

$$\partial^\beta \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}(-ix)^\beta u(x)\, dx.$$

On montre ensuite par intégration par parties successives que

$$\begin{aligned}(-i)^\alpha \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [\partial_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}]((-ix)^\beta u(x))\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}[\partial^\alpha((-ix)^\beta u(x))]\, dx \qquad (3.1)\end{aligned}$$

et donc pour tout β, α on a

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(u)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |-\partial^\alpha((-ix)^\beta u(x))|\, dx < +\infty$$

ce qui montre bien que $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
Montrons que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(u) = u$, pour $u \in \mathcal{S}$. Comme pour x fixé la fonction $e^{ix\cdot\xi}e^{-iy\cdot\xi}u(y)$ n'est pas intégrable dans le produit $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ on va raisonner par approximation. En effet, par convergence dominée on a bien

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \hat{u}(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

Comme la fonction $(x, \xi) \mapsto e^{ix\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{u}(\xi)$ est bien dans $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ on peut appliquer le théorème de Fubini et donc

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi \right) u(y) dy.$$

D'après l'exercice préliminaire au théorème on a

$$I_\varepsilon = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} u(y)\, dy = \pi^{\frac{N}{2}} 2^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} u(x - 2\sqrt{\varepsilon} z) dz.$$

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = u(x)\pi^{\frac{N}{2}} 2^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} dz = (2\pi)^N u(x)$ ce qui démontre $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(u) = u$. On peut démontrer $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(u) = u$ de la même façon. $\square$

Remarque 6. *On peut en fait montrer que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont continues sur $\mathcal{S}$ pour la topologie induite par les semi-normes $p_{\alpha,\beta}$.*

Remarque 7. *On notera parfois σ l'application linéaire "antipodale" $\sigma(f)(x) = f(-x) = \check{f}(x)$ de sorte que $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^N \sigma \circ \mathcal{F}$. L'application σ est clairement une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Proposition 10. *pour tout $u, v \in \mathcal{S}$ on a :*

i) $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) v(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\hat{v}(x)\, dx$

ii) $\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\bar{v}(x)\, dx = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}\, dx$. *En particulier on a* $\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\, dx = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(x)|^2\, d\xi$

iii) $u * v \in \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}\hat{v}$.

iv) $\widehat{uv} = (2\pi)^{-N} \hat{u} * \hat{v}$

v) $\widehat{\partial_j u} = i\xi_j \hat{u}$

vi) $\widehat{x_j u} = -\frac{1}{i}\partial_j \hat{u}$

Démonstration. La preuve de (i) est une application directe du théorème de Fubini. La preuve de (ii) découle de (i) en l'appliquant à u et $w = (2\pi)^{-N}\overline{\hat{v}}$. La propriété (v) a déjà été utilisée dans la preuve du théorème précédent (intégration par parties). La preuve des autres propriétés sont laissées en exercice. □

3.2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Définition 14 (Distribution tempérée). *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. C'est à dire une forme linéaire $T : \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ vérifiant*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|,|\beta| \leq N} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des distribution tempérées.

Si $T \in \mathcal{S}'$ alors l'application linéaire sur $\mathcal{S}$ définie par

$$\varphi \mapsto \langle T, \hat{\varphi}\rangle$$

définit une distribution tempérée car

$$|\langle T, \hat{\varphi}\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi})$$

et $p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi})$ est majoré par des semi-normes de φ par continuité de $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathcal{S}$.

Définition 15 (Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$). *Pour $T \in \mathcal{S}'$ on définit $\hat{T}$ (ou $\mathcal{F}T$) par*

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Proposition 11 (Propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$). *On peut facilement vérifier les assertions suivantes :*

1. *$\mathcal{F}T$ coïncide avec $\mathcal{F}T$ si $T \in \mathcal{S}$.*
2. *$\mathcal{F}$ est inversible, plus précisément $(\sigma \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{F} = (2\pi)^N Id$ (où $\sigma(T) = \check{T}$)*
3. $\mathcal{F}(\partial_j T) = i\xi_j \mathcal{F}T$
4. $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$

Remarque 8. *La dernière propriété est utile à la recherche de solution élémentaire. En effet, si P est un opérateur différentiel et T une distribution tempérée alors*

$$P(E) = \delta_0$$

Equivaut à $\mathcal{F}(P(E)) = 1$. On en déduit donc que

$$Q(\xi)\hat{E} = 1,$$

où $Q(\xi)$ est un polynôme. On l'appelle le "symbole" de l'opérateur P. Si ce polynôme ne s'annule pas on trouve par inversion,

$$E = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{Q(\xi)}\right).$$

Ceci donne lieu dans bien des cas, à une expression explicite pour la solution élémentaire d'un opérateur différentiel.

3.3 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^N)$

Avant-propos : Il existe plusieurs façons de définir la transformée de Fourier sur L^2. La plus élémentaire, souvent enseignée en 3ème année de Licence, consiste à définir tout d'abord la transformée de Fourier sur L^1 par la formule avec l'intégrale, puis de la prolonger de façon abstraite comme opérateur sur L^2. Ici nous voyons un point de vue différent, en considérant l'espace L^2 comme sous espace des distributions tempérées. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors f définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^N$ car

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\, dx \right| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2$$

et

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2\, dx \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^{N+1})|\varphi(x)| \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1+|x|^{N+1}}\, dx.$$

On peut donc définir la transformée de Fourier d'une fonction L^2 en tant de distribution tempérée. On montre alors le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Plancherel)**.** *L'application $(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. On sait déjà d'après la proposition 10 ii) que $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et que pour toute fonction φ dans $\mathcal{S}$ on a

$$\|(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\varphi\|_2 = \|(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\hat{\varphi}\|_2.$$

Maintenant si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors f est limite dans L^2 d'une suite de fonctions $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (par troncature et régularisation). Or la convergence L^2 entraine la convergence dans $\mathcal{S}'$ (par Cauchy-Schwarz). Par suite on a

$$\|\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_p\|_2 = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\|\varphi_k - \varphi_p\|_2. \tag{3.2}$$

Puisque φ_n converge dans L^2, elle est de Cauchy, et d'après (3.2) on en déduit que $\hat{\varphi}_n$ est aussi de Cauchy dans L^2, qui est complet, et donc converge aussi dans L^2 vers une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. La convergence a lieu aussi au sens des distributions. Par continuité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'$ et par unicité de la limite dans $\mathcal{S}'$ on en déduit que $\hat{f} \in L^2$. Et par passage à la limite dans l'identité

$$\|(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\varphi_n\|_2 = \|(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\hat{\varphi}_n\|_2.$$

Du même coup, on en déduit l'injectivité de $\mathcal{F}$ sur L^2. Pour la surjectivité, considérons $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $\mathcal{F}^{-1}(g) \in \mathcal{S}'$ à priori. Cependant, $\mathcal{F}^{-1}(g) = (2\pi)^{-N}\sigma\circ\mathcal{F}(g)$ est bien une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc il existe $f = (2\pi)^{-N}\sigma \circ \mathcal{F}(g) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathcal{F}(f) = g$. $\square$

3.4 Espace H^s et résolution de l'équation de Poisson par Fourier

Remarque : si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ le produit $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\varphi(\xi)$ est encore une fonction de $\mathcal{S}$. La multiplication de $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ avec une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'$ a donc bien un sens, donné par la formule

$$\langle (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}u, \varphi\rangle := \langle u, (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\varphi\rangle.$$

Ceci justifie la définition suivante.

Définition 16. *Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev (fractionnaire) $H^s(\mathbb{R}^N)$ par*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in \mathcal{S}' \ : \ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}.$$

On muni H^s du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi$$

et on note

$$\|u\|_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$$

Remarque :

- Une interprétation naïve de l'espace H^s est de dire que u possède "s-dérivées" dans L^2.
- L'espace H^0 n'est autre que l'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 12. *L'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que $\langle u, v\rangle_{H^s}$ définit bien un produit scalaire. Montrons que H^s muni de la norme associée, est complet. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans H^s. Alors $((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, qui est complet. On en déduit que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_n \to g$, avec $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Posons $u = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}} g \in \mathcal{S}'$. Alors $u \in H^s$ et

$$\|u_n - u\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_n - g\|_2 \to 0$$

ce qui montre que H^s est complet. □

Proposition 13 (Densité des fonctions régulières)**.** *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $u \in H^s$. On utilise le fait (connu) que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ (troncature et régularisation). La fonction $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ donc il existe une suite $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \to (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$. On pose alors $u_n := \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_n\big) \in \mathcal{S}$, et $\|u_n - u\|_{H^s} = \|\varphi_n - (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_2 \to 0$. □

Proposition 14 (Dualité)**.** *L'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ s'identifie au dual de $H^s(\mathbb{R}^N)$ au travers de l'application bilinéaire*

$$B(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)\ d\xi.$$

Démonstration. Si $v \in H^{-s}$ et $u \in H^s$, alors l'inégalité de Hölder donne

$$B(u,v) \leq \|v\|_{H^{-s}}\|u\|_{H^s}.$$

Par conséquent, pour $v \in H^{-s}$ fixé, l'application

$$L_v : u \mapsto B(v,u)$$

est une application linéaire continue sur H^s, donc un élément du dual $(H^s)'$. De plus,

$$\|L_v\|_{(H^s)'} \leq \|v\|_{H^{-s}}.$$

Par ailleurs, $v \mapsto L_v$ est injective, de H^{-s} vers $(H^{-s})'$. En effet, si $L_v = 0$ alors $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\bar{v} = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ donc $\bar{v} = 0$ dans $\mathcal{S}'$, d'où $v = 0$ car $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id$ sur $\mathcal{S}'$.
Montrons que $v \mapsto L_v$ est surjective. Soit $T \in (H^s)'$. On a

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{H^s}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$ et en particulier, $T \in \mathcal{D}'$ car pour $supp(\varphi) \subset K$,

$$\|\varphi\|_{H^s}^2 = \int_K (1+|\xi|^2)^s|\hat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \leq C_K\|\hat{\varphi}\|^2 = C_K\|\varphi\|^2.$$

On peut écrire, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}|\langle T,\varphi\rangle| &= |\langle \hat{T},\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle| = |\langle (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{T},(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle| \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^s} \leq C'\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_2.\end{aligned}$$

En posant $\psi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}$ on obtient donc,

$$|\langle (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{T},\psi\rangle| \leq C'\|\psi\|_{L^2}, \quad \forall\psi \in \mathcal{S}.$$

En particulier, $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{T}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$ muni de la norme L^2. Comme $\mathcal{S}$ est dense dans L^2, elle se prolonge en une forme linéaire continue sur L^2. Il existe donc une fonction $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\langle (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{T},\psi\rangle = \langle w,\psi\rangle$$

pour tout $\psi \in \mathcal{S}$, ce qui prouve que $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{T} \in L^2$ et donc $T \in H^{-s}$.
Enfin, l'inverse de $v \mapsto L_v$ est également continue par le théorème de Banach. □

Application : résolution de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^N$ avec terme source dans H^s.

Proposition 15. *Pour toute donnée $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique solution tempérée $u \in H^{s+2}$ à l'équation*

$$u - \Delta u = f.$$

Démonstration. En passant par Fourier, l'équation est équivalente à $(1+|\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}$, ou encore

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+|\xi|^2},$$

qui est bien une distribution tempérée car $\frac{1}{1+|\xi|^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$, ainsi que toutes ses dérivées.
Donc la distribution $u = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}}{1+|\xi|^2})$ est l'unique solution dans $\mathcal{S}'$.
Montrons maintenant que $u \in H^{s+2}$. En effet,

$$(1+|\xi|^2)^{s+2}|\hat{u}|^2 = (1+|\xi|^2)^{s+2}\frac{|\hat{f}|^2}{(1+|\xi|^2)^2} = (1+|\xi|^2)^s|\hat{f}|$$

Or $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}$ est dans L^2 par hypothèse donc u est bien dans H^{s+2}. □

Remarque 9. *On peut interpréter ce résultat comme le fait que l'opérateur $Id - \Delta$ fait "perdre" deux dérivées dans L^2. Par exemple, si f est dans L^2 et u est la solution de $u - \Delta u = f$ alors $u \in H^2$ ce qui veut dire que $\partial^\alpha u \in L^2$ pour tout $|\alpha| \leq 2$. Ce résultat est propre à l'espace L^2 et serait faux dans C^0. Il existe par exemple des fonctions u telles que $u - \Delta u$ soit une fonction continue, mais u n'est pas C^2. En revanche, le principe marche encore avec les espaces de type Hölder : si $u - \Delta u$ est $C^{0,\alpha}$, alors $u \in C^{2,\alpha}$. Nous verrons plus tard une preuve de ce résultat, due à Schauder.*

Chapitre 4

Espaces de Sobolev sur un domaine

Dans le chapitre précédent nous avons vu la définition de $H^s(\mathbb{R}^N)$ avec l'aide de Fourier, comme étant les fonctions admettant "s-dérivées dans L^2". Ici nous allons définir une notion analogue mais pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ qui n'est pas nécessairement l'espace entier, et basé sur des espaces L^p avec p pas nécessairement égal à 2.

4.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 17. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$ on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que pour tout $|\alpha| \leq k$, la dérivée $\partial^\alpha u$ (au sens des distributions) est une fonction de $L^p(\Omega)$. On muni $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p.$$

Remarque 10. *Les fonctions de $W^{1,p}$ ne sont en général pas des fonctions continues. Par exemple $(\ln |x|)^{\frac{1}{2}} \in H^1(]-1/2, 1/2[)$. En revanche ce sera toujours le cas si $p > N$ (voir plus loin).*

Remarque 11. *Pour $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^N$ on retrouve l'espace H^s (avec s entier, $s = k$) que l'on peut définir par transformée de Fourier :*

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \ : \ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

On notera parfois $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. La proposition suivante montre (en particulier) que H^k est un espace de Hilbert.

Proposition 16. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il est facile de voir que $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$ est une norme. Montrons que c'est un espace complet. Pour cela, on suppose que u_n est de Cauchy dans $\| \cdot \|_{W^{k,p}}$. Ceci implique que pour tout $|\alpha| \leq k$, la suite $\partial^\alpha u_n$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, qui est complet. Il existe donc $g_\alpha \in L^p$ telle que $\partial^\alpha u_n$ converge vers g_α. Or, la converge L^p entraine la convergence dans $\mathcal{D}'$ donc $\partial^\alpha u_n$ converge aussi vers $\partial^\alpha g_0$ au sens des distributions. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$, on doit avoir $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$. On en déduit que $g_0 \in W^{k,p}$ et u_n converge vers g_0 dans $W^{k,p}$, ce qui montre que $W^{k,p}$ est complet. $\square$

Définition 18. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On note $W_0^{k,p}(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

Commentaire : En général $W_0^{k,p}(\Omega)$ est un sous espace vectoriel stricte de $W^{k,p}(\Omega)$. On peut penser que $W_0^{k,p}(\Omega)$ contient les fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ qui sont "nulles au bord".

Proposition 17 (Approximation)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ il existe u_n une suite de fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que $u_n \to u$ dans L^p et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. On note $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω. C'est une fonction dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et c'est également une distribution sur $\mathbb{R}^N$. On note $v_n = \tilde{u} * \rho_n$ où ρ_n est une suite régularisante. On sait que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $v_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$. De plus au sens des distributions on a

$$\partial_i(\tilde{u} * \rho_n) = \rho_n * \partial_i \tilde{u}.$$

Or sur l'ouvert Ω, la dérivée au sens des distributions $\partial_i \tilde{u}$ coincide avec la dérivée de u au sens des distributions, $\partial_i u$. C'est donc une fonction de $L^p(\Omega)$ par hypothèse et on en déduit que $\rho_n * \partial_i \tilde{u} \to \partial_i u$ dans $L^p(\Omega)$, autrement dit, $\partial_i(v_n)$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers $\partial_i u$. Pour obtenir v_n à support compact dans $\mathbb{R}^N$ is suffit de la multiplier par une suite de fonctions de troncature $\xi_n \in C^\infty$ du type $\xi_n = \xi(x/n)$ où ξ vaut 1 au voisinage de la boule unité. □

Proposition 18 (Produits de fonctions)**.** *Si $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty$ alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty$.*

Démonstration. Puisque v est une fonction bornée, il est clair que $uv \in L^p$. En particulier, c'est une distribution. Le tout est de démontrer la formule $\partial_i(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u$ au sens des distributions car dans ce cas on aura bien $\partial_i(un) \in L^p$.
Pour ce faire on utilise la proposition précédente pour obtenir deux suites u_n et v_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$. Puisque u_n et v_n sont C^∞ on a bien

$$\partial_i(uv) = u\partial_i v + v\partial_i u.$$

On prend donc une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et on écrit

$$\int_\Omega u_n v_n \partial_i \varphi = -\int_\Omega \partial_i(u_n v_n)\varphi dx = \int_\Omega (u\partial_i v + v\partial_i u)\varphi$$

et on conclut avec le théorème de convergence dominée pour obtenir la conclusion souhaitée. □

4.2 Espace dual de $W^{1,p}$, convergence faible

L'espace dual de $W^{1,p}$ est noté $W^{-1,p}$. Il s'agit des formes linéaires continues sur $W^{1,p}$. On sait que l'espace L^p est reflexif pour $1 < p < +\infty$. On peut en déduire que l'espace $W^{1,p}$ est également un espace reflexif pour $1 < p < +\infty$. En vertu du théorème de Banach-Alaoglu on peut en déduire la proposition suivante.

Proposition 19. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$. Alors il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et une sous-suite (u_{n_k}) qui converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. En particulier*

$$\|\nabla u\|_p \leq \liminf \|\nabla u_n\|_p.$$

Démonstration. La première partie de la preuve découle du théorème de Banach-Alaoglu et de la réfléxivité de $W^{1,p}$. Pour la deuxième partie, il s'agit d'une conséquence classique du théorème de Hahn-Banach, que toute fonctionnelle convexe continue est faiblement semi-continue, la norme-p du gradient étant un cas particulier de fonctionnelle convexe. □

Dans la suite on verra que l'on peut en réalité supposer, dans l'énoncé précédent, que u_n converge fortement dans L^p.

4.3 Opérateur de prolongement

Définition 19. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est un domaine d'extension pour $W^{k,p}$ si il existe un opérateur linéaire continu de prolongement P de $W^{k,p}(\Omega)$ vers $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $P(u) = u$ dans Ω. C'est à dire qu'il existe une fonction prolongée $P(u) \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que $P(u) = u$ dans Ω et*

$$\|P(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

avec $C > 0$ une constante qui dépend de Ω.

Proposition 20. *Le demi-espace $H^+ := \mathbb{R}^N \cap \{x_N > 0\}$ est un domaine d'extension pour $W^{1,p}$, et ce pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration. Pour $u \in W^{1,p}(H^+)$ on définit $P(u)$ par

$$P(u)(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Vérifions que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si $u \in W^{1,p}(H^+)$. Déjà, il est clair par définition que $P(u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Essayons d'identifier la dérivée de $P(u)$ au sens des distributions.
Pour cela on considère $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on écrit en utilisant un changement de variables, pour, dans un premier temps, $1 \leq i \leq N-1$,

$$\langle \partial_i P(u), \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} P(u)\partial_i \varphi dx = \int_{H^+} u\partial_i \Psi dx$$

où $\Psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$. La fonction Ψ n'est pas à support compact dans H^+ donc n'est pas admissible comme fonction test. Mais on peut l'approcher en introduisant une fonction plateau $\theta_k(t) = \theta(kt)$ où θ est une fonction C^∞ valant 1 si $t < 1/2$ et 0 si $t > 1$. On a donc par convergence dominée

$$\int_{H^+} u\partial_i \Psi dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{H^+} u\theta_k(x_N)\partial_i(\Psi)dx$$

et comme $u \in W^{1,p}(H^+)$,

$$\int_{H^+} u\theta_k(x_N)\partial_i(\Psi)dx = \int_{H^+} \partial_i u\theta_k(x_N)\Psi dx$$

et en passant à la limite on a démontré que $\partial_i P(u)(x', x_N) = \partial_i u(x', x_N)\mathbf{1}_{H^+} + \partial_i u(x', -x_N)\mathbf{1}_{H^-}$.
Reste le cas $i = N$. Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a cette fois

$$\langle P(u), \varphi \rangle = \int_{H^+} u\partial_N \chi dx$$

où $\chi(x', x_N) = \chi(x', x_N) - \chi(x', -x_N)$. En particulier, $\chi(x', 0) = 0$, et comme χ est de plus à support compact dans $\mathbb{R}^N$ il existe une constante $C > 0$ telle que $|\chi(x', x_N)| \leq M|x_N|$. Soit θ_k comme tout à l'heure. Montrons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} uk\theta'(kx_N)\chi dx \to 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

En effet,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} uk\theta'(kx_N)\chi\right| \leq kMC\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|x_N dx \leq MC\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|dx \to 0$$

car $u \in L^p$. On en déduit que

$$\int_{H^+} u\partial_N(\theta_k\chi)dx = \int_{H^+} u\theta_k\partial_N\chi dx + \int_{H^+} uk\theta'(kx_N)\chi dx,$$

et en faisant $k \to +\infty$ il vient, par convergence dominée,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{H^+} u\partial_N(\theta_k\chi)dx = \int_{H^+} u\partial_N\chi dx.$$

D'autre part

$$\int_{H^+} u\partial_N(\theta_k\chi)dx = -\int_{H^+}(\partial_N u)\theta_k\chi dx \to_{k\to+\infty} -\int_{H^+}(\partial_N u)\chi dx.$$

On a donc démontré que

$$\partial_N(P(u))(x', x_N) = \partial_N u(x', x_N)\mathbf{1}_{H^+} - \partial_N u(x', -x_N)\mathbf{1}_{H^-}$$

et donc finalement $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(H^+)}$$

□

Proposition 21. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de classe C^1, alors c'est un domaine d'extension pour $W^{1,p}$, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration. On utilise une partition de l'unité. C'est à dire que l'on recouvre $\partial\Omega$ par un nombre fini de cubes Q_i, $1 \leq i \leq N_0$ centrés sur $\partial\Omega$ tels que $\partial\Omega \cap Q_i$ soit le graphe d'une fonction C^1 et on associe à ces cubes Q_i des fonctions θ_i de classe C^∞, pour $0 \leq i \leq N_0$ telles que pour tout $1 \leq i \leq N_0$, θ_i est à support dans Q_i, tandis que θ_0 est à support dans Ω, et vérifiant

$$\sum_{i=0}^{N_0}\theta_i = 1.$$

On note $u = \sum_{i=0}^{N_0}\theta_i u = \sum_{i=0}^{N_0} u_i$ et on va prolonger chacune des fonctions u_i en distinguant le cas $i = 0$ des autres $i \geq 1$.

prolongement de u_0 : On prolonge u_0 de la façon la plus naturelle, c'est à dire

$$P(u_0)(x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

En effet,

$$\nabla(u_0) = u\nabla\theta_0 + \theta_0\nabla u,$$

et donc $\nabla(u_0) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|\nabla(u_0)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\theta_0\|_\infty\|u\|_p + \|\theta_0\|_\infty\|\nabla u\|_p \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

prolongement de u_i, $1 \leq i \leq N_0$: l'idée est d'utiliser, dans chaque Q_i, une fonction Ψ_i qui "redresse" le bord. C'est à dire, en notant $Q := \{|x_j| \leq 1\}$ et $Q^+ = Q \cap H^+$, il existe des fonctions de classe C^1, $\Psi_i : Q^+ \to Q_i$ telle que $\Psi_i(Q^+) = Q_i \cap \Omega$.
On considère ensuite $v_i = u_i \circ \Psi_i$. On a $v_i \in W^{1,p}(H^+)$ et même $\|v_i\|_{W^{1,p}(H^+)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ car

$$\int_{H^+} |v_i|^p \, dx = \int_{Q^+} |v_i|^p \, dx = \int_{Q_i} |u_i|^p |detD\Psi_i^{-1}| dx \leq C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

et $|\nabla v_i| = |D\Psi_i||\nabla u_i \circ \Psi|$ de sorte que

$$\int_{H^+} |\nabla v_i|^p \, dx = \int_{Q_i} |D\Psi_i \circ \Psi_i^{-1}|^p |\nabla u_i|^p |detD\Psi_i^{-1}| \, dx \leq C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

On prolonge alors v_i en $\tilde{v}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à l'aide de la proposition précédente, puis on revient à Ω en définissant

$$P(u_i) = \tilde{v}_i \circ \Psi_i^{-1}.$$

Par un calcul analogue à précédemment on voit que $\|P(u_i)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
conclusion : Enfin, on pose

$$P(u) = P(u_0) + \sum_{i=1}^{N_0} P(u_i),$$

et on vérifie facilement qu'il a toutes les propriétés souhaitées. □

Remarque 12. *il existe des domaines d'extension qui ne sont pas C^1. Par exemple il est facile de voir en utilisant 4 reflexions par rapport à ses côtés respectifs, qu'un carré dans R^2 est un domaine d'extension. En général un domaine à bord uniformément Lipschitz sera un domaine d'extension. Les domaines problématiques pour l'extension seront des domaines dont le bord contient des singularités de type "cusp" (comme le sur-graphe de la fonction $\sqrt{|x|}$).*

4.4 Injection de $W^{1,p}$ dans L^{p^*} pour $p \leq N$

On commence par deux conséquences très classiques de l'inégalité de Hölder.

Lemme 1. *1. Si $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R})$ sont k_0 fonctions telles que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{k_0}} = 1$ alors $f = f_1 f_2 \cdots f_{k_0} \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \prod_{i=1}^{k_0} \|f_i\|_{p_i}. \tag{4.1}$$

2. D'autre part, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < q \leq \infty$ alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^{p\alpha} \|f\|_q^{q(1-\alpha)} \tag{4.2}$$

où

$$r = p\alpha + (1-\alpha)q \quad , \quad \alpha \in [0,1]. \tag{4.3}$$

Démonstration. Montrons d'abord (4.1). Pour $k_0 = 2$ c'est l'inégalité de Hölder classique. Puis par récurrence, si l'inégalité est vraie pour k_0, et si on se donne $k_0 + 1$ fonctions f_i on peut poser

$$1 = \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{k_0}}\right) + \frac{1}{p_{k_0+1}} =: \frac{1}{q} + \frac{1}{p_{k_0+1}}.$$

Ainsi, en appliquant Hölder classique on obtient

$$\|f\|_1 \leq \|f_{k_0+1}\|_{L^{p_{k_0+1}}} \left(\int |f_1 f_2 \cdots f_{k_0}|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ensuite en remarquant par définition de q que

$$\frac{q}{p_1} + \cdots + \frac{q}{p_{k_0}} = 1$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne

$$\left(\int |f_1 f_2 \cdots f_{k_0}|^q\right) \leq \prod_{i=1}^{k_0} \|f_i\|_{p_i}^q,$$

ce qui termine la preuve.

Montrons maintenant (4.2). On écrit $|f|^r = |f|^{\alpha p} |f|^{(1-\alpha)q}$ puis on observe que $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{1-\alpha}$ sont conjugués donc

$$\int_\Omega |f|^r \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^\alpha \left(\int_\Omega |f|^q\right)^{1-\alpha},$$

d'où le résultat. □

Ensuite on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $N \geq 2$ et $f_1, f_2, \cdots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $1 \leq i \leq N$ on pose*

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Alors la fonction $f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \cdots f_N(\tilde{x}_N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Démonstration. Le cas $N = 2$ est facile. Il y a dans ce cas deux fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ et la fonction $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ est bien dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ d'après le théorème de Fubini, avec

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On procède maintenant par récurrence : pour $f_1, f_2, \cdots, f_{N+1}$ dans $L^N(\mathbb{R}^N)$ on fixe d'abord x_{N+1} c'est à dire que l'on considère les fonctions f_i comme fonctions de $\mathbb{R}^{N-1}$ et on applique Hölder pour obtenir

$$\int |f(x)| dx_1 dx_2 \cdots dx_N \leq \|f_{N+1}\|_N \left(\int |f_1 f_2 \cdots f_N|^{N'} dx_1 dx_2 \cdots dx_N\right)^{\frac{1}{N'}}$$

où $1/N' = 1 - \frac{1}{N}$ donc

$$N' = \frac{N}{N-1}.$$

Appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions $|f_1|^{N'}, |f_2|^{N'}, \cdots, |f_N|^{N'}$ il vient

$$\int |f_1 f_2 \cdots f_N|^{N'} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}^{N'},$$

d'où

$$\int |f(x)| dx_1 dx_2 \cdots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

On fait maintenant varier x_{N+1}. Chacune des fonctions $x_{N+1} \mapsto \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$, $1 \leq i \leq N$, appartient à $L^N(\mathbb{R})$. Par conséquent le produit $\prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ d'après la remarque ci dessus, et le fait que $\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = 1$, avec estimation de la norme et donc en intégrant pour $x_{N+1} \in \mathbb{R}$ on trouve

$$\int |f(x)| dx_1 \cdots dx_{N+1} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}$$

ce qui termine la preuve. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant nous dit que les fonctions de l'espace de Sobolev "gagnent en intégrabilité". Cela vient du fait que le gradient est suffisamment intégrable.

Théorème 4.1. *Soit $1 \leq p < N$. On note*

$$p^* = \frac{pN}{N-p}.$$

On distingue deux cas :

1. *Si Ω est un ouvert (quelconque), alors pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

   où C dépend uniquement de N et p.

2. *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors il existe une constante $C = C(p, N, \Omega)$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Démonstration. On commence par le cas $p = 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert quelconque. On considère d'abord $u \in C_c^1(\Omega)$. On a

$$|u(x_1, x_2, \cdots, x_N)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)| dt.$$

Et de même pour $1 \leq i \leq N$,

$$|u(x_1, x_2, \cdots, x_N)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_i, \cdots x_N)| dt =: f_i(\tilde{x}_i).$$

Donc

$$|u(x)|^N \leq f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \cdots f_N(\tilde{x}_N).$$

On déduit du lemme 2, comme $f_i^{\frac{1}{N-1}} \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.$$

On a donc démontré

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.4}$$

ce qui démontre l'inégalité dans le cas $p = 1$ et $u \in C_c^1(\Omega)$.
Démontrons maintenant l'inégalité pour $1 \leq p < N$. Pour cela on considère un paramètre $\gamma > 1$ à fixer plus tard et on applique (4.4) à la fonction $|u|^\gamma \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, au lieu de u. Alors

$$\nabla |u|^\gamma = \gamma |u|^{\gamma-1} signe(u) \nabla u$$

et on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |u|^\gamma | dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Maintenant on choisit γ de sorte que $(\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{\gamma N}{N-1}$ ce qui donne

$$\gamma = \frac{p(N-1)}{N-p} > 1,$$

et dans ce cas $(\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{\gamma N}{N-1} = \frac{Np}{N-p} = p^*$ et donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui prouve l'inégalité dans le cas où $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Maintenant si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ il existe par définition une suite $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$. En appliquant (4.4) à u_n et en passant à la limite on a $\|\nabla u_n\|_1 \to \|\nabla u\|_1$ et d'après Fatou (ou le fait que u_n est de Cauchy dans L^{p^*}) on obtient l'inégalité pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Reste enfin le cas d'un ouvert Ω de classe C^1. Dans ce cas il existe un opérateur d'extension. En appliquant l'inégalité dans $\Omega = \mathbb{R}^N$ tout entier à la fonction étendue $P(u)$ on obtient l'inégalité sur u. $\square$

Remarque 13. *D'après l'inégalité (4.2), on obtient en réalité que si $u \in W^{1,p}$ alors $u \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq p^*$. De plus si Ω est borné alors d'après Hölder $u \in L^r$ pour tout $1 \leq r \leq p^*$.*

Proposition 22 (Cas limite $p = N$)**.**

1. *Si Ω est un ouvert (quelconque), alors pour toute fonction $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ et pour tout $N \leq q < +\infty$ on a*

   $$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)},$$

   où C dépend uniquement de N, p et q.

2. *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors pour tout $N \leq q < +\infty$ il existe une constante $C = C(p, N, q, \Omega)$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,N}(\Omega)$ on a*

   $$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}.$$

Démonstration. On suppose d'abord que $u \in C_c^1(\Omega)$. En reprenant l'inégalité (4.5) avec $p = N$ on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N}},$$

ou encore

$$\|u\|^{\gamma}_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \gamma \|u\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{(\gamma-1)N}{N-1}}} \|\nabla u\|_{L^N}.$$

soit

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq C \|u\|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{L^{\frac{(\gamma-1)N}{N-1}}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{\gamma}}_{L^N}.$$

D'après Young $ab \leq C(a^\gamma + b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})$ donc

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq C(\|u\|_{L^{\frac{(\gamma-1)N}{N-1}}} + \|\nabla u\|_{L^N}).$$

En choisissant $\gamma = N$ on trouve donc

$$\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} \leq C(\|u\|_{L^N} + \|\nabla u\|_{L^N}) = C\|u\|_{W^{1,N}}$$

et $u \in L^N \cap L^{\frac{N^2}{N-1}}$. D'après l'inégalité d'interpolation (4.2) on en déduit que $u \in L^q$ pour tout $N \leq q \leq \frac{N^2}{N-1}$ et

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,N}}.$$

Réitérant l'argument avec $\gamma = N+1, N+2$, etc... on aboutit à

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,N}},$$

pour tout $N \leq q < +\infty$ (avec une constante qui dépend de q). Ceci est vrai pour $u \in C_c^1(\Omega)$ et donc par densité l'inégalité reste vraie pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dans le cas de $W^{1,p}(\Omega)$ avec Ω de classe C^1 on peut utiliser un opérateur d'extension et appliquer l'inégalité sur la fonction étendue pour trouver le résultat. □

4.5 Injection de $W^{1,p}$ dans $C^{0,\alpha}$ pour $p > N$

Théorème 4.2 (Morrey)**.** *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}$$

pour presque tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et $C > 0$ une constante qui dépend uniquement de N et p. En particulier, u admet un représentant continu.

Démonstration. On suppose que $u \in C_c^1(\Omega)$. Soit $B = B(x_0, r)$ une boule de rayon r qui contient 0. Pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} u(tx)\right) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \partial_i u(tx)\, dt.$$

Posons $\bar{u} = \frac{1}{B} \int_B u(x)\, dx$. En intégrant l'inégalité ci dessus en $x \in B$ on trouve

$$\bar{u} - u(0) = \frac{1}{|B|} \int_B \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \partial_i u(tx)\, dt dx,$$

d'où, puisque $|x_i| \leq 2r$ (car $0 \in B(x_0, r)$),

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u(0)| &\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \ |\partial_i u(tx)| \ dtdx \leq C \frac{r}{|B|} \int_B \int_0^1 \sum_{i=1}^N \ |\partial_i u(tx)| \ dtdx \\ &\leq C \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \int_B \sum_{i=1}^N \ |\partial_i u(tx)| \, dxdt \\ &= C \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \int_{tB} \sum_{i=1}^N \ |\partial_i u(y)| \, \frac{dy}{t^N} dt. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Or d'après l'inégalité de Hölder on a, en utilisant $tB \subset B$

$$\int_{tB} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| dy \leq \left(\int_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} |tB|^{\frac{1}{p'}},$$

on en déduit donc que

$$|\bar{u} - u(0)| \leq C \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(B)} r^{\frac{N}{p'}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} dt = C' r^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B)}.$$

Or le point 0 étant supposé arbitrairement dans B, on a en réalité démontré que pour tout $x \in B$,

$$|u(x) - \bar{u}| \leq C r^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B)}. \tag{4.7}$$

Maintenant, si x et y sont des points quelconques de $\mathbb{R}^2$, il existe une boule $B(x_0, r)$ telle que $x, y \in B(x_0, r)$ et telle que $r = 2|x-y|$. On en déduit par inégalité triangulaire que $|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)|$ donc

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B)}.$$

Ceci démontre l'estimation Holderienne pour $u \in C_c^1$. Maintenant par approximation, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ il existe une suite $u_n \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}$, et presque partout. En passant à la limite on en déduit donc l'estimation pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Enfin, démontrons la borne L^∞. Si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ alors pour B une boule qui contient x de rayon 1 on a

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_p.$$

or

$$|\bar{u}| \leq \frac{1}{|B|} \int_B |u| dx \leq \frac{1}{|B|} |B|^{\frac{1}{p'}} \|u\|_p \leq C\|u\|_p.$$

Donc finalement

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}},$$

d'où la borne sur $\|u\|_{L^\infty}$. En raisonnant par approximation on obtient la borne pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Définition-Proposition 2 (Espaces de Hölder)**.** *Soit $\alpha \in]0,1[$ et $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact. On dit que $u : K \to \mathbb{R}$ est Hölderienne de puissance α sur K s'il existe une contsante $C > 0$ telle que*

$$\forall x, y \in K, \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

La plus petite constante C vérifiant l'inégalité ci-dessus est notée

$$[u]_{C^{0,\alpha}(K)} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

L'espace vectoriel $C^{0,\alpha}(K) := C^0(K) \cap \{u \ : \ [u]_{C^{0,\alpha}(K)} < +\infty\}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(K)} := \|u\|_{C^0(K)} + [u]_{C^{0,\alpha}(K)}.$$

Définition 20. *Si $k \in \mathbb{N}$ on définit $C^{k,\alpha}(K)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in C^k(K)$ telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^N$ avec $|\beta| = k$ on a $\partial^\beta u \ \in C^{0,\alpha}$. C'est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} = \|u\|_{C^k} + \max_{|\beta|=k} [\partial^\beta u]_{C^{0,\alpha}(K)}$$

Corollaire 6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1 et $p > N$. Alors pour $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

avec injection continue, c'est à dire

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Morrey à la fonction étendu $P(u)$, où P est l'opérateur d'extension associé au domaine Ω. □

Un sous-produit de la preuve du théorème de Morrey est l'inégalité intéressante suivante.

Proposition 23 (Inégalité de Poincaré dans une boule)**.** *. Si $p > N$ alors pour toute boule $B = B(x_0, r)$ de rayon r et pour toute fonction $u \in W^{1,p}(B)$ on a*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(B)} \leq Cr\|\nabla u\|_{L^p(B)},$$

avec $\bar{u} = \frac{1}{|B|}\int_B u dx$ et C une constante qui dépend de N et p.

Démonstration. En reprenant la preuve du théorème de Morrey à partir de (4.7)

$$|u(x) - \bar{u}| \leq Cr^{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(B)}$$

il suffit d'élever à la puissance p puis d'intégrer en $x \in B$ pour obtenir le résultat. □

4.6 Compacité

Dans la section précédente nous avons obtenu des injections continues de $W^{1,p}$ dans des espaces L^q ou $C^{0,\alpha}$. Nous voyons dans la suite que certaines de ces injections sont en fait des injections compactes.

Théorème 4.3 (Rellich-Kondrachov)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Alors*

1. *$1 \leq p < N$ l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans L^r pour tout $r \in [1, \frac{np}{n-p}[$.*
2. *$p = N$ l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans L^r pour tout $r \in [1, +\infty[$.*
3. *$p > N$ l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans C^0.*

Démonstration. Nous démontrons d'abord 3. qui repose sur le théorème d'Ascoli. En effet, supposons que (u_i) soit une famille vérifiant $\|u_i\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M$ d'après le théorème de Morrey chacune des u_i possède un représentant continu $\tilde{u}_i$. De plus la famille $(\tilde{u}_i)$ est uniformément bornée et équicontinue car pour tout i

$$|\tilde{u}_i(x) - \tilde{u}_i(y)| \leq CM|x - y|^\alpha.$$

On déduit donc du Théorème d'Ascoli que la famille (u_i) est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega})$.

La preuve des points 1. et 2. repose sur un critère de compacité dans l'espace L^p qui est la version L^p du théorème d'Ascoli (voir [Brezis, Analyse fonctionnelle] pour une démonstration).

Lemme 3 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *On pose $\tau_h(f) = f(x + h)$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall \overline{\omega} \subset \Omega \ \exists \delta < dist(\omega, \Omega^c) \quad \textit{tel que}$$

$$\|\tau_h(f) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N; |h| < \delta \textit{ et } \forall f \in \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

On suppose de plus que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{\omega} \subset \Omega \textit{ tel que } \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{4.9}$$

Alors $\mathcal{F}|_\omega$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

En admettant ce lemme nous pouvons démontrer l'injection compacte de $W^{1,p}(\Omega)$ dans L^r pour $r < p^*$. En effet, il suffit de vérifier (4.8) et (4.9) où $\mathcal{F}$ est la boule unité de $W^{1,p}(\Omega)$.
Pour (4.8) on utilise que $1 \leq q < p^*$ pour écrire

$$q = \alpha + (1 - \alpha)p^* \text{ avec } \alpha \in]0, 1[.$$

Soit $\overline{\omega} \subset \Omega$, $u \in \mathcal{F}$ et $|h| \leq dist(\omega, \Omega^c)$. Grace à l'inégalité d'interpolation on a

$$\|\tau_h(u) - u\|^q_{L^q(\omega)} \leq \|\tau_h(u) - u\|^\alpha_{L^1(\omega)} \|\tau_h(u) - u\|^{(1-\alpha)p^*}_{L^{p^*}(\omega)}. \tag{4.10}$$

Montrons que

$$\|\tau_h(u) - u\|_{L^1(\omega)} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.11}$$

En effet, si u est une fonction $C^1(\omega)$ et $h \in \mathbb{R}^N$ on a

$$u(x + h) - u(x) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th) dt.$$

Par suite

$$\int_\omega |\tau_h(u) - u| \leq |h| \int_\omega \int_0^1 |\nabla u(x + th)| dt dx = |h| \int_0^1 \int_\omega |\nabla u(x + th)| dx dt \leq |h| \int_\Omega |\nabla u| dx.$$

Puis, si u est une fonction $W^{1,p}(\Omega)$ on raisonne par approximation par une suite de fonctions $C^1(\omega)$.
Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la vérification de (4.8). En effet, de (4.10) et (4.11) on tire

$$\|\tau_h(u)-u\|^q_{L^q(\omega)} \leq |h|^\alpha \|\nabla u\|^\alpha_{L^1(\Omega)} \|\tau_h(u)-u\|^{(1-\alpha)p^*}_{L^{p^*}(\omega)} = C|h|^\alpha.$$

On conclut que $\|\tau_h(u)-u\|_{L^q(\omega)} \leq \varepsilon$ pour $|h|$ assez petit, avec C qui ne dépend pas de f dans $\mathcal{F}$ (car controlé par $\|f\|_{W^{1,p}}$).
La vérification de (4.9) est plus simple. En effet d'après Hölder,

$$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus\omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega\setminus\omega)} |\Omega\setminus\omega|^{1-\frac{q}{p^*}} \leq \varepsilon$$

pour ω bien choisi. □

Rappel. Soit X, Y deux espaces de Banach. On dit qu'une injection $X \subset Y$ est compacte si l'image de la boule unité de X par l'application identité est relativement compacte dans Y. En particulier, dans ce cas, de toute suite bornée dans X on peut extraire une sous-suite qui converge dans Y. Par exemple, si on a une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > N$ alors on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément dans Ω.
Voici un exemple intéressant d'application des injections compactes de Sobolev.

Corollaire 7 (Inégalité de Poincaré dans un domaine C^1)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, connexe, de classe C^1. Alors pour tout $r \in [1, \frac{np}{n-p}[$ il existe une constante $C = C(\Omega, r) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u - u_\Omega\|_r \leq C\|\nabla u\|_p,$$

où $u_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Pour r fixé, supposons qu'il existe u_n dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^r(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

posons

$$v_n = \frac{u_n - (u_n)_\Omega}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|_r} \in W^{1,p}(\Omega),$$

de sorte que $\|\nabla v_n\|_p \leq \frac{1}{n}$ et $\int_\Omega v_n dx = 0$. Par ailleurs, $\|v_n\|_r = 1$. D'après Hölder on a également

$$\|v_n\|_p \leq |\Omega|^{\frac{pr}{r-p}} \|v_n\|_r = |\Omega|^{\frac{pr}{r-p}}.$$

La suite v_n est uniformément bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ donc d'après le théorème de Rellich-Kondrachov il existe une sous suite qui converge fortement dans L^r, vers une certaine fonction v qui vérifie $\|v\|_r = 1$ et $\int_\Omega v(x)dx = 0$. Quitte à extraire une nouvelle sous suite, la convergence a lieu aussi faiblement dans $W^{1,p}$. Par semi-continuité de la norme on obtient

$$\|\nabla v\|_p \leq \liminf_n \|\nabla v_n\|_p = 0,$$

Donc v est constante. Mais alors $v = 0$ car $\int_\Omega v(x)dx = 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\|v\|_r = 1$ et termine donc la preuve. □

4.7 Théorème de Campanato

Définition 21 (Semie-norme de Campanato)**.** *Soient* $1 \leq p < \infty$*,* $\alpha \in]0,1[$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert. Pour* $u \in L^p(\Omega)$ *on définit*

$$[u]_{p,\alpha}^p := \sup_{x_0 \in \Omega, r>0} \frac{1}{r^{\alpha p+N}} \int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |u - u_{x_0,r}|^p \, dx.$$

où $u_{x_0,r} := \fint_{B(x_0,r)\cap\Omega} u \, dx$*.*

On remarque facilement que si $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ alors $[u]_{p,\alpha} < +\infty$. En réalité, la réciproque est vraie comme énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 4.4 (Campanato)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert de classe* C^1 *et* $p > N$*. Alors pour tout* $u \in L^p(\Omega)$ *on a*

$$C_1[u]_{p,\alpha} \leq [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_2[u]_{p,\alpha},$$

avec C_1 *et* C_2 *des constantes qui dépendent de* Ω, p, α, N*.*

Démonstration. La première inégalité se démontre rapidement. En effet, si $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ alors pour tout $x_0 \in \ \Omega$ et $r > 0$, si $x, y \in B(x_0,r)\cap\Omega$ on a $|u(x) - u(y)| \leq [u]_{C^{0,\alpha}}|x-y|^\alpha \leq [u]_{C^{0,\alpha}}(\overline{\Omega})(2r)^\alpha$. On en déduit que $|u(x) - u_{x_0,r}| \leq [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}(2r)^\alpha$ puis

$$\int_{\Omega\cap B(x_0,r)} |u(x) - u_{x_0,r}|^p \, dx \leq \omega_N 2^{\alpha p}[u]^p_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} r^{\alpha p+N},$$

donc finalement

$$[u]_{p,\alpha} \leq \omega_N^{\frac{1}{p}} 2^\alpha [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Pour la deuxième inégalité on aura besoin du théorème cellèbre suivant :

Théorème 4.5 (de différentiation de Lebesgue)**.** *Soit* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Alors pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *on a*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f(y) \, dy = f(x).$$

Poursuivons la preuve en admettant ce théorème. Soit $u \in L^p(\Omega)$. Montrons qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$ on a

$$|u_{x_0,2^{-k}R} - u_{x_0,2^{-l}R}| \leq C[u]_{p,\alpha}(2^{-k}R^\alpha) \qquad \text{pour tout } k < l.$$

Comme Ω est de classe C^1 il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r < diam(\Omega)$ on a

$$|\Omega \cap B(x_0,r)| \geq Ar^N. \tag{4.12}$$

Si $x, x_0 \in \Omega$ et $R > r > 0$, on a

$$|u_{x_0,R} - u_{x_0,r}| \leq 2^{p-1}(|u_{x_0,R} - u(x)|^p + |u(x) - u_{x_0,r}|^p).$$

En intégrant par rapport à $x \in \Omega \cap B(x_0,r)$ et en utilisant (4.12) is sort

$$\begin{aligned}
|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}|^p &\leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}\left(\int_{B(x_0,r)\cap\Omega} |u_{x_0,r} - u(x)|^p \, dx + \int_{B(x_0,R)\cap\Omega} |u(x) - u_{x_0,R}|^p \, dx\right) \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}[u]^p_{p,\alpha}(r^{N+\alpha p} + R^{N+\alpha p}) \\
&\leq \frac{2^p}{Ar^N}[u]^p_{p,\alpha}R^{N+\alpha p} = C[u]^p_{p,\alpha}\left(\frac{R}{r}\right)^N R^{\alpha p}
\end{aligned}$$

Posons $R_j = 2^{-j}R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors en posant $r = R_{j+1}$ et $R = R_j$ nous avons démontré

$$|u_{x_0,R_j} - u_{x_0,R_{j+1}}| \leq C[u]_{p,\alpha}(R_j)^\alpha.$$

En sommant $j = k, \cdots, l-1$ il vient

$$|u_{x_0,R_l} - u_{x_0,R_k}| \leq C[u]_{p,\alpha}R_k^\alpha.$$

On en déduit que la suite u_{x_0,R_k} est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, notée $\tilde{u}(x_0)$. Par passage à la limite dans l'inégalité ci dessus on trouve

$$|\tilde{u}(x_0) - u_{x_0,R_k}| \leq C[u]_{p,\alpha}R_k^\alpha.$$

D'après le théorème de Lebesgue, $\tilde{u}$ coïncide avec u presque partout. Soit maintenant $x, y \in \Omega$ et posons $R = |x-y|$. On sait d'après ce qui précède que

$$|\tilde{u}(x) - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\alpha}R^\alpha$$

et

$$|\tilde{u}(y) - u_{y,2R}| \leq C[u]_{p,\alpha}R^\alpha.$$

Par ailleurs si $z \in B(x,2R) \cap B(y,2R)$,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u_{x,2R} - u(z)| + |u(z) - u_{y,2R}|$$

et comme $B_R(x) \cup B_R(y) \subset B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$ on en déduit en intégrant sur $\Omega \cap B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$ que

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq \frac{1}{|\Omega \cap B_R(x)|}\int_{\Omega \cap B_R(x)} |u_{x,2R} - u(z)|dz + \frac{1}{|\Omega \cap B_R(y)|}\int_{\Omega \cap B_R(y)} |u_{y,2R} - u(z)|dz.$$

En utilisant Hölder et le fait que Ω est C^1 on trouve

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq C[u]_{\alpha,p}|x-y|^\alpha.$$

D'après l'inégalité triangulaire on a donc montré que

$$|u(x) - u(y)| \leq C[u]_{\alpha,p}|x-y|^\alpha.$$

□

Remarque 14. *On retrouve ainsi le théorème de Morrey.*

Chapitre 5

Equations linéaires sous forme de divergence

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On s'intéresse dans ce chapitre aux équations sous la forme

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega.$$

Ici $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée appelée "second membre", et A est une fonction à valeur matricielle $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} : \Omega \to \mathbb{R}$, appelés "coefficients".
Les coefficients A seront supposés "uniformément elliptiques" au sens suivant :

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } A(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2 \quad p.p. x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{5.1}$$

Un exemple typique étant $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$. Dans ce cas $-\mathrm{div} A\nabla u = -\Delta u$.
Par ailleurs, l'équation est le plus souvent accompagnée de "conditions au bord" comme par exemple :

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega : \text{condition dite de Dirichlet.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ sur } \partial\Omega : \text{condition de type Neumann.}$$

Pour simplifier nous supposerons dans un premier temps la condition de Dirichlet homogène $u = 0$ sur $\partial\Omega$, soit à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Voici une notion classique de solution qu'il est naturel de poser.

Définition 22 (Solution classique). *Soit $A \in C^1(\Omega)$ et $f \in C^0(\Omega)$. On dit que u est une solution classique (ou solution forte) si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et vérifie (5.2).*

Dans un premier temps, nous allons chercher une solution en un sens plus faible.

5.1 Existence de solutions faibles

Définition 23. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, et A des coefficients mesurables bornés, et $f \in L^2(\Omega)$. On dit que u est une solution faible de (5.2) si $u \in H_0^1(\Omega)$ et si pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx. \tag{5.3}$$

Autrement dit, $u \in H_0^1(\Omega)$ et la fonction $A\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie $-div(A\nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarques :

1. la notion de solution faible permet de relâcher les hypothèses de régularité sur u mais également des données f et A.
2. la condition au bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est encodée dans le fait que $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. on aurait pu prendre de manière plus générale $f \in H^{-1}(\Omega)$ et dans ce cas remplacer l'intégrale $\int uf$ par le crochet de dualité.
4. par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ l'identité (5.5) reste vraie pour toute $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 24. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Alors toute solution classique de (5.5) est aussi solution faible.*

Démonstration. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ une solution classique. Alors en multipliant l'équation $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ par $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et en intégrant sur Ω il vient

$$-\int_\Omega \varphi \, \mathrm{div}(A\nabla u) \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Puis en intégrant par parties on trouve

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx,$$

d'où le résultat. □

L'existence d'une solution faible repose sur le Lemme général suivant.

Lemme 4 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert, $L \in H'$ et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire satisfaisant les 2 propriétés suivantes :*

1. *continue : il existe $M > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$ pour tout $u, v \in H$;*
2. *coercive : il existe $\lambda > 0$ telle que $a(u, u) \geq \lambda\|u\|_H$ pour tout $u \in H$.*

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \text{ pour tout } v \in H,$$

et

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda}\|L\|_{H'}.$$

De plus, si l'on suppose que a est symétrique, alors u est aussi l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{v \in H} J(v), \quad \text{avec} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Démonstration. Pour tout $u \in H$ on définit $L_u \in H'$ par $L_u(v) = a(u, v)$. La continuité de a ainsi que sa bilinearité montre bien que $L_u \in H'$, avec $\|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$. Le théorème de Riesz assure donc l'existence et l'unicité d'un élément $Au \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$\langle Au, v\rangle = a(u, v), \text{ et } \|Au\|_H = \|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H.$$

Par le même théorème de Riesz il existe $f \in H$ tel que

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in H,$$

avec $\|f\|_H = \|L\|_{H'}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un unique u pour lequel $Au = f$. Ainsi, on aura bien la relation $a(u, v) = L(v)$ pour tout v et u sera une solution faible.

On remarque tout d'abord que $A : H \to H$ est un opérateur linéaire continu. Montrons que c'est un opérateur bijectif. L'injectivité résulte de la coercivité de a. En effet, si $Au = 0$ alors $0 = a(u, u) \geq \lambda\|u\|_H^2$ donc $u = 0$. Pour montrer la surjectivité, on montre d'abord que $Im(A)$ est fermé dans H. En effet si Au_n converge dans H, alors

$$\lambda\|u_n - u_m\|_H^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \langle Au_n - Au_m, u_n - u_m\rangle \leq \|Au_n - Au_m\|_H\|u_m - u_n\|_H.$$

On en déduit que (u_n) est de Cauchy dans H, et converge vers un certain $u \in H$. Par continuité de A, Au_n converge vers Au et donc l'image est bien fermée.

On peut donc décomposer $H = Im(A) \oplus Im(A)^\perp$ et A sera surjective si $Im(A)^\perp = \{0\}$. Or $v \in Im(A)^\perp$ donne par définition $\langle Au, v\rangle = 0$ pour tout $u \in H$. En particulier pour $u = v$ on trouve $0 = \langle Av, v\rangle \geq \lambda\|v\|_H^2$ et donc $v = 0$.

On a donc bien démontré que $A : H \to H$ était bijectif. En conséquence, il existe un unique $u \in H$ tel que $Au = f$, ce qu'il fallait démontrer. Enfin, en effectuant le produit scalaire avec u on obtient

$$\lambda\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle = L(u) \leq \|L\|_{H'}\|u\|_H,$$

d'où l'estimation souhaitée.

Montrons enfin que u est solution du problème de minimisation. Soit $u \in H$. Pour tout $w \in H$ on écrit

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,w) + \frac{1}{2}a(w,w) - L(u) - L(w) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) + a(u,w) - L(w). \end{aligned}$$

Si u est une solution faible alors $a(u, w) - L(w) = 0$ et donc $J(u + w) > J(u)$ pour tout $w \in H$, et u est donc un minimiseur de J dans H.
Réciproquement si u est un minimiseur alors en faisant $u + tw$ avec $t > 0$ on trouve

$$J(u+tw) = J(u) + \frac{1}{2}t^2 a(w,w) + ta(u,w) - tL(w) \geq J(u),$$

soit

$$\frac{1}{2}t^2 a(w,w) + ta(u,w) - tL(w) \geq 0.$$

En divisant par $t > 0$ et en faisant $t \to 0^+$ on trouve

$$a(u,w) - L(w) \geq 0.$$

En changeant w en $-w$ on a l'inégalité inverse ce qui finalement montre que

$$a(u,w) = L(w) \text{ pour tout } w \in H,$$

ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

On peut maintenant montrer l'existence d'une solution faible.

Proposition 25 (Existence faible pour le problème de Dirichlet). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Soit A des coefficients mesurables bornés, satisfaisant la condition d'ellipticité (5.1) et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Par ailleurs on a l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si de plus la matrice A est symétrique alors u est aussi l'unique solution de

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega fv \, dx.$$

Démonstration. Soit $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx.$$

Alors d'après Cauchy-Schwarz, L est continue car

$$|L(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1}.$$

On définit également la forme bilinéaire a par

$$a(u,v) := \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

qui est bien continue, de nouveau par Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| \leq \|A\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2.$$

La forme bilinéaire a est également coercive car d'après la condition d'ellipticité et l'inégalité de Poincaré on a

$$a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u dx \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{2C_\Omega} \int_\Omega |u|^2 dx.$$

On conclut donc à l'aide du Lemme de Lax-Milgram. $\square$

5.2 A propos du problème de Neumann

De manière analogue on peut définir des solutions faibles pour le problème de Neumann

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ A\nabla u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

On remarque l'ajout du terme u dans l'équation. Ceci est pour garantir l'unicité de la solution, notamment dans le cas où $f = 0$.

Définition 24. *Soit A des coefficients mesurables bornés, et $f \in L^2(\Omega)$. On dit que u est une solution faible de (5.4) si $u \in H^1(\Omega)$ et si pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ on a*

$$\int_\Omega u\varphi dx + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx. \tag{5.5}$$

On remarque cette fois que $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (au lieu de $C_c^\infty(\Omega)$ dans le problème de Dirichlet), et $u \in H^1(\Omega)$ (au lieu de $H_0^1(\Omega)$ dans le problème de Dirichlet). Essayons de justifier ce choix de façon formelle.
En effet en intégrant par parties (formellement, c'est à dire en supposant que u soit régulière) il vient

$$\int_\Omega f\varphi dx = \int_\Omega u\varphi dx + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega u\varphi dx - \int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi A\nabla u \cdot \nu\, d\sigma.$$

Donc pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitraire on trouve déjà que u doit vérifier $u - \mathrm{div}(A\nabla u) = f$ dans Ω. Mais alors on doit avoir

$$\int_{\partial\Omega} \varphi A\nabla u \cdot \nu\, d\sigma = 0$$

donc en prenant cette fois $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ arbitraire on trouve, à cause du terme de bord, que $A\nabla u \cdot \nu = 0$.

Proposition 26 (Existence faible pour le problème de Neumann)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Soit A des coefficients mesurables bornés satisfaisant la condition d'ellipticité (5.1), et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible u pour le problème de Neumann (5.4).*

Démonstration. Soit $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_\Omega fv\, dx.$$

Alors d'après Cauchy-Schwarz, L est continue car

$$|L(v)| \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq \|f\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

On définit également la forme bilinéaire a par

$$a(u,v) := \int_\Omega uv\, dx + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

qui est bien continue, de nouveau par Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| \leq (1 + \|A\|_\infty)\|u\|_2\|v\|_2.$$

La forme bilinéaire a est également coercive car d'après la condition d'ellipticité on a

$$a(u,u) = \|u\|_2^2 + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u dx \geq \|u\|^2 + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \min(1,\lambda)\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

On conclut donc à l'aide du Lemme de Lax-Milgram. □

5.3 Régularité des solutions faibles

Le but de cette section est de démontrer le théorème de régularité suivant, qui montre en particulier que sous certaines hypothèses sur f et Ω, toute solution faible est en réalité une solution forte.

Théorème 5.1 (Régularité pour le problème de Dirichlet)**.** *Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 et $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ des coefficients elliptiques de classe C^1. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible pour le problème de Dirichlet c'est à dire*

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ où C est une constante qui dépend seulement de Ω. De plus si Ω est de classe C^{m+2}, si $f \in H^m(\Omega)$ et si $A \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ alors

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \qquad \text{avec } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m};$$

en particulier si $m > \frac{N}{2}$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et u est une solution classique.
Enfin si $f, A \in C^\infty$ et Ω est de classe C^∞ alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Un résultat analogue existe aussi pour le problème de Neumann.

Théorème 5.2 (Régularité pour le problème de Neumann)**.** *Avec les mêmes hypothèses que pour le problème de Dirichlet, on obtient les mêmes conclusions concernant le problème de Neumann.*

Nous allons démontrer le théorème en utilisant la "méthode des translations" de Niremberg. Pour $h \in \mathbb{R}^N$ et $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on note

$$D_h(\varphi) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|} = \frac{\tau_{-h}(\varphi)(x) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Proposition 27. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in L^2$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout ouvert ω, $\overline{\omega} \subset \Omega$, et pour tout $|h| < dist(\omega, \Omega^c)$,*

$$\|D_h(u)\|_{L^2(\omega)} \leq C.$$

On a alors $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sqrt{N}$.

Démonstration. On commence par supposer que $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Soit h tel que $|h| \leq dist(\omega, \Omega^c)$. On écrit

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h dt.$$

D'après Cauchy-Schawrz et Fubini, il en résulte que

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2 \, dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_\omega |\nabla u(x+th)|^2 dx dt.$$

Par le changement de variables $y = x + th$ on trouve

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^2 dy dt.$$

Si $|h| \leq dist(\omega, \Omega^c)$ alors $\omega + th \subset \Omega$ donc finalement

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, on raisonne par approximation par des fonctions C^∞, ce qui conclut la preuve de la condition nécéssaire.
Montrons maintenant la réciproque. On prend $h = \varepsilon e_i$ où $0 < \varepsilon < dist(\omega, \Omega^c)$ et e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. On pose $g_\varepsilon := D_{\varepsilon e_i} u$ de sorte que l'hypothèse montre que la famille $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\omega)$. Il existe donc une sous suite telle que $g_\varepsilon \to g^{(i)}$ faiblement dans $L^2(\omega)$. Comme ceci est vrai pour tout $\overline{\omega} \subset \Omega$, par procédé diagonal on peut trouver des $g^{(i)} \in L^2_{loc}(\Omega)$ et une sous suite telle que $g_\varepsilon \to g^{(i)}$ faiblement dans L^2_{loc} et en particulier

$$\|g^{(i)}\|_{L^2(\omega)} \leq \liminf \|D_{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

En prennant ω_k croissant vers Ω on obtient finalement que $g^{(i)}$ est dans $L^2(\Omega)$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et ω un ouvert contenant le support de φ et tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Pour $\varepsilon < dist(\omega, \Omega^c)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (D_{\varepsilon e_i} u(x))\varphi(x)dx &= \int_\Omega \frac{u(x+\varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}\varphi(x)dx \\
&= -\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y) - \varphi(y-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}dy \\
&= -\int_\Omega u(y) D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

Par ailleurs comme $D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y) \to \partial_i \varphi(y)$ pour tout y, d'après le théorème de convergence dominée on en déduit que

$$\int_\Omega g^{(i)}\varphi dx = -\int_\Omega u \partial_i \varphi dx,$$

ce qui montre que $u \in H^1(\Omega)$ avec $\partial_i u = g^{(i)}$ et

$$\int_\Omega |\partial_i u|^2 dx \leq C,$$

où $C > 0$ est la constante de l'énoncé. □

Preuve du Théorème 5.1. On traite séparément la régularité intérieure, et la régularité au bord.

1) Régularité Interieure. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. On souhaite montrer que $u \in H^2(\omega)$. Remarquons que dans le cas où $A = Id$, on peut utiliser la transformée de Fourier. En effet, si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ est une fonction de troncature qui vaut 1 sur ω, on peut considérer φu et voir que

$$\Delta(\varphi u) = \Delta(\varphi)u + 2\,\nabla u \cdot \nabla\varphi + \varphi\Delta u.$$

Cette fonction étant bien dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on en déduit grâce au chapitre sur la transformée de Fourier, que $\varphi u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ et comme $\varphi u = u$ sur ω il en découle directement que $u \in H^2(\omega)$.
Ici nous allons voir une autre preuve qui ne fait pas intervenir la transformée de Fourier, et qui s'applique pour des coefficients variables A.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et h tel que $|h| < dist(supp(\varphi), \Omega^c)$. Alors on remarque que

$$\int_\Omega D_h(A\nabla u)\cdot\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla(D_{-h}\varphi)\, dx = \int_\Omega f(D_{-h}\varphi)\, dx$$

car u est solution faible.
Puis, comme $D_h(A\nabla u) = (\tau_{-h}A)(D_h\nabla u) + (D_h A)\nabla u$ on obtient

$$\int_\Omega (\tau_{-h}A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega ((D_h A)\nabla u\cdot\nabla\varphi + fD_{-h}\varphi)\, dx$$

On en déduit que

$$\int_\Omega (\tau_{-h}A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\,dx \le \big(\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par densité, cette inégalité reste vraie pour $\varphi\in H^1(\Omega)$ telle que le support de φ soit un compact de Ω (et pour h tel que $|h| < dist(supp(\varphi),\Omega^c)$). On pose alors $\varphi = \eta^2 D_h u$ où $\eta\in C_c^\infty(\Omega)$ et $0\le\eta\le 1$. En particulier, $\|\nabla\eta\|_\infty \le C$.
On reporte dans l'estimation précédente en utilisant $\nabla\varphi = 2\eta\nabla\eta(D_h u)+\eta^2\nabla(D_h u)$ et la condition d'ellipticité sur A,

$$\int_\Omega (\tau_{-h}A)\nabla(D_h u)\cdot(2\eta\nabla\eta(D_h u)+\eta^2\nabla(D_h u))\,dx \le (\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc

$$\lambda\int_\Omega \eta^2|\nabla D_h u|^2\,dx \quad\le\quad (\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega (\tau_{-h}A)\nabla(D_h u)\cdot(2\eta\nabla\eta(D_h u)\,dx$$

Or d'une part pour tout $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}(\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad &+ \quad \|f\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C(\varepsilon)(\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 + \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2\\ &\le \quad C(\varepsilon)(\|A\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 + 2\varepsilon\|2\eta\nabla\eta(D_h u)\|_2^2 + 2\varepsilon\|\eta^2\nabla(D_h u)\|_2^2\\ &\le \quad C(\|\nabla u\|_2^2 + \|f\|_2^2) + 2\varepsilon\|\eta\nabla(D_h u)\|_2^2\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\left|\int_\Omega (\tau_{-h}A)\nabla(D_h u)\cdot(2\eta\nabla\eta(D_h u)\,dx\right| \le C\|\eta\nabla D_h(u)\|_2\|D_h u\|_2 \le \varepsilon\|\eta\nabla D_h(u)\|_2^2 + C(\varepsilon)\|\nabla u\|_2.$$

Donc finalement en prennant $2\varepsilon = \frac{\lambda}{4}$ on trouve que

$$\frac{\lambda}{2}\|\eta D_h(\nabla u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C(\|\nabla u\|_2^2 + \|f\|_2^2).$$

En prenant $\eta = 1$ sur ω et en utilisant le Lemme précédent, il en découle que $u\in H^2(\omega)$ et

$$\|D^2 u\|_{L^2(\omega)} \le C(\|f\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2).$$

Or en prenant $\varphi = u$ dans la formulaiton faible (ainsi que l'inégalité de Poincaré et la condition d'ellipticité) on obtient

$$\|\nabla u\|_2^2 \le C\|f\|_2^2$$

et donc finalement

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \le C\|f\|_2^2.$$

(notons que la constante C dépend de $1/(dist(\omega,\partial\Omega))$ à cause de la majoration de $\nabla\eta$ donc nous ne pouvons pas conclure directement que $u\in H^2(\Omega)$.)

2) régularité au bord : cas d'un bord plat. Supposons tout d'abord pour simplifier que $\Omega = Q_2^+ := [-2,2]^N\cap\{x_n>0\}$. Le "bord" ici est donc $\{x_N=0\}$. Notons $Q_1^+ := [-1,1]^N\cap\{x_n>0\}\subset Q_2^+$ un cube légèrement plus petit, ayant même bord. En considérant des translations h parallèles au bord (i.e. $h\cdot e_N = 0$), avec $|h|\le 1$, on peut raisonner exactement comme précédemment c'est à dire que pour une fonction η qui tronque dans les directions orthogonales à e_N la fonction $\eta^2 D_h u$

est admissible dans la formulation faible. En reprenant la preuve ligne à ligne on en déduit que pour tout $1 \leq i \leq N-1$

$$\|\partial_i \nabla u\|_{L^2(Q_1^+)} \leq C\|f\|_2^2.$$

Reste donc à estimer $\partial_N \nabla u$. En réalité, d'après Schwarz, seule $\partial^2_{NN} u$ est à estimer car les autres sont déjà dans $\partial_k \nabla u$ pour $1 \leq k \leq N-1$.
Pour cela on remarque que $a_{NN} > 0$, uniformément d'après la condition d'ellipticité qui implique $\langle Ae_N, e_N\rangle \geq \lambda$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(Q_2^+)$. On prend $\frac{1}{a_{NN}}\varphi$ comme fonction test ce qui donne

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla(\frac{1}{a_{NN}}\varphi)dx = \int_\Omega fudx$$

ou encore

$$\int_\Omega \sum_{1\leq k,l\leq N} a_{kl}\partial_k u \partial_l(\frac{1}{a_{NN}}\varphi)dx = \int_\Omega fudx$$

En isolant le dernier terme on peut écrire

$$\int_\Omega \partial_N u \partial_N \varphi dx = \int_\Omega fudx - \int_\Omega \sum_{(k,l)\neq(N,N)} a_{kl}\partial_k u \partial_l(\frac{1}{a_{NN}}\varphi)dx - \int_\Omega a_{NN}\partial_N u \partial_N(\frac{1}{a_{NN}})\varphi dx.$$

Or nous savons déjà que les distributions $\partial_{k,l} u$ sont dans L^2 avec norme controlée par $\|f\|_2^2$. L'identité ci dessous montre donc que la distribution $\partial^2_{NN} u$ est bien dans L^2 avec norme controlée par $\|f\|_2^2$.

3) régularité au bord : cas général. L'idée est, comme d'habitude, d'utiliser une partition de l'unité et de se ramener localement au cube Q_2^+. C'est à dire, on recouvre le bord $\partial\Omega$ d'un nombre fini de cubes Q_i tels que $\partial\Omega \cap Q_i$ est le graphe d'une fonction de classe C^2. Il existe alors un C^2-difféomophisme $\Phi : Q_i \to Q_2$ tel que $\Phi(\partial\Omega \cap Q_i) = Q_2^+ \cap \{x_N = 0\}$. On note Ψ l'inverse de Φ. On considère alors la fonction $\tilde{u} = u \circ \Psi$ définie sur Q_2^+. Montrons que $\tilde{u} \in H^1(Q_2^+)$. Soit $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. Alors la fonction $\tilde{u}_n = u_n \circ \Psi$ est de classe C^2 sur Q_2 et un calcul montre que

$$\nabla(\tilde{u}_n) = (D\Psi)^T(\nabla u_n \circ \Psi).$$

Soit

$$\partial_i(\tilde{u}_n) = (\nabla u_n \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi.$$

En effectuant un changement de variables on a

$$\int_{Q_2^+} |\tilde{u}_n - \tilde{u}|^2 dx = \int_{Q_i^+} |u_n - u|^2 |det(D\Phi)| dx \leq C\|u_n - u\|_2 \to 0,$$

ce qui montre que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans L^2. Un calcul similaire montre que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(Q_2^+)$ on a

$$\int_{Q_2^+} (\partial_i \tilde{u}_n)\varphi dy \to \int_{Q_2^+} (\nabla u \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \varphi dy$$

ce qui montre que $\tilde{u} \in H^1(Q_2^+)$ et que

$$\nabla(\tilde{u}) = (D\Psi)^T(\nabla u \circ \Psi).$$

Essayons maintenant d'identifier le problème variationnel vérifié par $\tilde{u}$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(Q_2^+)$. Alors $\varphi \circ \Phi \in C_c^2(Q_i^+) \subset H_0^1(\Omega)$ et donc comme u est solution faible on a

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla(\varphi \circ \Phi)\, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i u \partial_i(\varphi \circ \Phi) dx = \int_\Omega f\varphi \circ \Phi\, dx.$$

Comme

$$\partial_i(\varphi \circ \Phi) = \sum_{k=1}^N (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k$$

il vient

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i u (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k dx = \int_\Omega f\varphi \circ \Phi\, dx.$$

En changeant de variables,

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_{Q_2^+} (a_{ij} \circ \Psi)(\partial_j u \circ \Psi \partial_i u \circ \Psi)\partial_k \varphi(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)|det(D\Psi)|dx = \int_{Q_2^+} f \circ \Psi \varphi |det(D\Psi)|\, dx.$$

Autrement dit on a

$$\int_{Q_2^+} \tilde{A}\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_{Q_2^+} \tilde{f}\varphi\, dx$$

avec $\tilde{A} = (\tilde{a}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq N}$ définit par

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^N |det(D\Psi)|(a_{i,j} \circ \Psi)(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)(\partial_j \Phi_l \circ \Psi) \quad \text{et} \quad \tilde{f} = |det(D\Psi)|(f \circ \Psi).$$

On a clairement $\tilde{f} \in L^2(Q_2^+)$ avec $\|\tilde{f}\|_2 \leq C\|f\|_2$. De plus pour tout $1 \leq k, l \leq N$, $\tilde{a}_{k,l} \in C^1(\overline{Q_2^+})$ avec $\|\tilde{A}\|_{C^1} \leq C\|A\|_{C^1}$. Enfin, la condition d'ellipticité est préservée car

$$\tilde{A}(y)\xi \cdot \xi \geq \lambda |det(D\Psi)||\nabla \Phi \circ \Psi(y)\xi|^2 \geq C|\xi|^2,$$

car Ψ est un C^1 difféo.
Conclusion : en utilisant le cas du "demi-plan" on en déduit donc que $\tilde{u} \in H^2(Q_2^+)$ et donc $u \in H^2(B_i^+)$ par changement de variables, avec norme contrôlée par $\|f\|_2$. En sommant sur tous les cubes Q_i et en utilisant également l'estimation intérieure on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$.

4) régularité d'ordre supérieure. Donnons simplement l'idée de la preuve. Si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > 0$ alors pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| = m$, en testant la formulation variationelle avec $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et en intégrant par parties on obtient que la fonction $\partial^\alpha u$ vérifie

$$\int_\Omega \partial^\alpha(A\nabla u) \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi.$$

En developpant $\partial^\alpha(A\nabla u)$, on trouve un premier terme d'ordre m qui est $A\nabla(\partial^\alpha u)$, puis une somme d'autres termes d'ordre inférieurs qui, si l'on raisonne par récurrence, sont tous dans L^2. Il s'en suit donc que $u \in H^{m+2}$ avec estimations contrôlées par $\|f\|_2$.

Ensuite, montrons que $u \in C^2$ si $m > N/2$. Pour cela, on va utiliser l'injection de Sovolev successivement de $m-1$ jusqu'à $m-k$ où $k \leq \frac{N}{2}$ pour chercher à montrer que les dérivées d'ordre

2 sont dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. En effet, si $u \in H^{2+m}$ alors $\partial^\alpha u \in W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq m+1$. En particulier, $\partial^\alpha u \ \in L^{2^*}(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq m+1$ et donc $\partial^\alpha u \in W^{1,2^*}(\Omega)$. De la même façon, pour $\alpha \leq m$, on en déduit que $\partial^\alpha u \in W^{1,2^{**}}(\Omega)$. Ainsi de suite, au bout de k fois on a montré que $\partial^\alpha u$ pour $|\alpha| = m-k+2$, est dans l'espace $W^{1,2^{**\cdots *}}$ avec k étoiles. Rappelons que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Donc

$$\frac{1}{2^{**}} = \frac{1}{2^*} - \frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N}.$$

et par récurrence, si on note p_k l'exposant $2^{*\cdots *}$ avec k étoiles on trouve

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1}{2} - \frac{k}{N}.$$

On s'arrête dès que $p_k > N$ de manière à avoir l'injection dans les fonctions continues (Théorème de Morrey). C'est à dire que (supposons $N > 2$, sinon on raisonne de manière similaire) pour $k = \left[\frac{N}{2}\right]$ on trouve $p_k > N$ car de $\frac{N}{2} < k+1$ on tire directement que

$$p_k = \frac{2N}{N-2k} > N.$$

Ainsi, d'après Morrey, $\partial^\alpha u \in C^0(\overline{\Omega})$ pour $|\alpha| = m-k+2$. Donc si $k = m > \frac{N}{2}$ on aura $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

L'argument fonctionne de façon analogue pour le cas C^∞.

$\square$

Chapitre 6

Régularité Hölder (théorème de Schauder)

Dans ce chapitre on démontre le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné et* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *où* $0 < \alpha < 1$. *Si* u *est solution de* $-\Delta u = f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *alors* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. *De plus pour tout ouvert* ω *tel que* $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$ *il existe une constante* $C = C(N, \alpha, \Omega, \omega)$ *telle que*

$$\|D^2 u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\omega})} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Démonstration. *vue en cours.* □

Chapitre 7

Equations non linéaires sous forme divergence

Dans ce chapitre nous voyons comment montrer l'existence d'une solution pour certaines équations non linéaires, en utilisant une méthode de point fixe. Ce chapitre est tiré du poly de Jean-François Babadjian.

7.1 Théorèmes de point fixes

Point fixe : pour $f : A \to A$, un point fixe est un élément x vérifiant $f(x) = x$.

Théorème 7.1 (Point fixe de Banach, Picard). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante, i.e., il existe un constante $0 < K < 1$ telle que*

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \quad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Alors, f admet un unique point fixe $\bar{x}$ dans X, i.e.,

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Rappel de la preuve : construire une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrer qu'elle est de de Cauchy...

Théorème 7.2 (Point fixe de Brouwer). *Soient K un ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe dans K.*

Démonstration. **Etape 1 :** On se ramène au cas où K est une boule fermée. Supposons le résultat vrai dans le cas des boules férmées.
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ continue.

$$K \subset B.$$

On définit $g = f \circ P_K$ où P_K est la projection orthogonale sur le convexe fermé K. On a alors que

$$g : B \to K \subset B$$

est continue. Donc il existe $\bar{x} \in B$ tel que $f(P_K(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans K, alors nécessairement $\bar{x} \in K$ et $P_K(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que

$$\boxed{f(\bar{x}) = \bar{x}}.$$

Etape 2 : On se ramène au cas où f est continue sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $f : \mathbb{R}^n \to B$. Même preuve que précédemment : si $f : B \to B$ on pose $g = f \circ P_B$. Alors

$$g : \mathbb{R}^n \to B \text{ est continue.}$$

Il existe alors un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(P_B(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Comme f prend ses valeurs dans B, alors $\bar{x} \in B$ et $P_B(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que

$$\boxed{f(\bar{x}) = \bar{x}.}$$

Etape 3 : On se ramène au cas où f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $f : \mathbb{R}^n \to B$. En effet, si $f : \mathbb{R}^n \to B$ est une fonction continue, on pose $f_\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$. Ainsi $|f_\varepsilon| \leq 1$ et

$$f \text{ continue } \Rightarrow f_\varepsilon \to f \text{ uniformément sur tout compact.}$$

Soit $x_\varepsilon \in B$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.
B est compact, il existe $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x} \in B$. Comme $f_{\varepsilon_j} \to f$ uniformément sur B, alors

$$f_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) \to f(\bar{x})$$

, ce qui montre que

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Soit maintenant $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, B)$ fixée.

Supposons par contradiction que

$$f(x) \neq x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Etape 4 : Construction d'une rétraction $\mathbb{C}^\infty$ de $B \to \partial B$. Construisons une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \partial B$ telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$. On considère la demi-droite d'extrémité $f(x)$ et qui est dirigé par le vecteur $x - f(x)$. Cette demi-droite coupe la sphère ∂B en un unique point noté $g(x)$.
Il est clair par construction que g est à valeurs dans ∂B et que

$$g(x) = x \quad \text{ si } x \in \partial B.$$

Par définition de g, il existe un nombre $\lambda_x \geq 0$ tel que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$. Ce nombre s'obtient en résolvant l'équation du second degré

$$1 = |g(x)|^2 = |f(x)|^2 + 2\lambda f(x) \cdot (x - f(x)) + \lambda^2 |x - f(x)|^2,$$

et en prenant la racine positive. Le calcul du discriminant donne

$$\Delta_x = \big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2 \geq 0$$

car $|f(x)| \leq 1$. On obtient donc que

$$\lambda_x = \frac{-f(x) \cdot (x - f(x)) + \sqrt{\big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2}}{|x - f(x)|^2}$$

et que $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que g est continue sur $\mathbb{R}^n$.
Notons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. En effet, comme $x \mapsto \Delta_x$ est continue sur le compact B elle atteint son minimum en un point $x_0 \in B$. Si $\Delta_{x_0} = 0$, alors on aurait $|f(x_0)| = 1$ et $x_0 \cdot f(x_0) = 1$ ce qui impliquerait que $x_0 = f(x_0)$ qui est impossible. Par conséquent, en posant $\delta = \Delta_{x_0} = \min_{x \in B} \Delta_x$, on constate effectivement que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$.
On déduit de cela que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est de classe C^∞ sur B, donc que $g \in \mathbb{C}^\infty(B)$ et, de plus,

$$c := \max_B |\nabla g| < +\infty.$$

Etape 5. Pour tout $0 \leq t \leq 1$ et pour tout $x \in B$, on pose

$$\varphi_t(x) = (1-t)x + tg(x)$$

de sorte que $\varphi_0(x) = x$ et $\varphi_1(x) = g(x)$. Montrons que si $0 < t < 1/(1+c)$, alors φ_t réalise un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{B}$ sur $\mathring{B}$.

Tout d'abord, notons que l'on a toujours $\varphi_t(B) \subset B$ car si $x \in B$, alors $g(x) \in \partial B \subset B$ et par convexité de B, $\varphi_t(x) = (1-t)x + tg(x) \in B$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout x, $y \in B$,

$$|g(x) - g(y)| \leq c|x-y|.$$

donc

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| \geq (1-t)|x-y| - t|g(x) - g(y)| \geq ((1-t) - ct)|x-y|,$$

et on en déduit que φ_t est injective dès que $0 \leq t < 1/(1+c)$.
Remarque : φ_t est l'identité sur ∂B, il vient que $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$.

Ensuite pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, on a

$$\nabla \varphi_t = (1-t)I + t\nabla g = (1-t)\left(I + \frac{t}{1-t}\nabla g\right)$$

avec

$$\frac{t}{1-t}|\nabla g| \leq \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, $\nabla \varphi_t(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathring{B}$ et le théorème d'inversion globale montre que φ_t réalise un $\mathbb{C}^1$-difféormorphisme de $\mathring{B}$ sur son image $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$ qui est donc ouverte.
Montrons que φ_t est surjective. Par l'absurde on suppose que $\varphi_t(\mathring{B}) \neq \mathring{B}$.
Il existe donc $y \in \mathring{B} \setminus \varphi_t(\mathring{B})$. Soit $y_0 \in \varphi_t(\mathring{B})$ et posons

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 : \; y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin \varphi_t(\mathring{B})\}.$$

Comme $\varphi_t(\mathring{B})$ est ouvert, on a $\lambda_0 > 0$. On a aussi $\lambda_0 \leq 1$ car $y \notin \varphi_t(\mathring{B})$. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, on a que $y_{\lambda_0 - 1/k} \in \varphi_t(\mathring{B})$ ce qui implique l'existence d'un $x_k \in \mathring{B}$ tel que $\varphi_t(x_k) = y_{\lambda_0 - 1/k}$. Comme B est compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_k \to x_0 \in B$ et par continuité de φ_t, on a $\varphi_t(x_0) = y_{\lambda_0}$. Il vient alors que $x_0 \notin \partial B$ car sinon, on aurait $x_0 = y_{\lambda_0} \in \partial B$ et, par convexité le segment $[y_0, y] \subset \mathring{B}$. Par conséquent, $x_0 \in \mathring{B}$ et donc $\varphi_t(\mathring{B})$ est un voisinage de y_{λ_0}. On en déduit qu'il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $y_\lambda \in \varphi_t(\mathring{B})$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1[$, ce qui contredit la définition de λ_0 comme borne inférieure et montre que φ_t est bien surjective.

Etape 6. Comme $\varphi_t(x) = (1-t)x + tg(x)$,

$$t \mapsto \det(\nabla\varphi_t(x)) = a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_n(x)t^n$$

est une fonction polynômiale de degré n par rapport à t, on en déduit que $P : t \mapsto \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\,dx$ est également une fonction polynômiale. Par ailleurs, du fait que $\nabla\varphi_t = (1-t)I + t\nabla g \to I$ uniformément sur B, alors $\det(\nabla\varphi_t) \to 1$ uniformément sur B ce qui montre l'existence d'un $t_0 < 1/(1+c)$ tel que pour tout $0 < t < t_0$ et tout $x \in B$, on a $\det(\nabla\varphi_t(x)) > 0$. D'après la formule de changement de variables, on a alors que pour tout $0 < t < t_0$,

$$|\mathring{B}| = |\varphi_t(\mathring{B})| = \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\,dx = P(t),$$

ce qui montre que le polynôme P est constant sur $]0, t_0[$ et donc constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$|\mathring{B}| = P(1) = \int_B \det(\nabla\varphi_1(x))\,dx = \int_B \det(\nabla g(x))\,dx.$$

Par ailleurs, s'il existait un $x \in B$ tel que $\det(\nabla g(x)) \neq 0$, le théorème d'inversion locale montrerait que g réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de x et donc que l'image de g ne serait pas d'intérieur vide, ce qui est absurde puisque g prend ses valeurs dans la sphère ∂B. Par conséquent $\det(\nabla g) = 0$ sur B ce qui est impossible puisque $|B| \neq 0$. On en déduit finalement que f admet au moins un point fixe dans B. □

Théorème 7.3 (Point fixe de Schauder). *Soient E un espace de Banach, K un sous ensemble compact et convexe de E et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe dans K.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, par compacité de K, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Notons que $\sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c) > 0$ pour tout $x \in K$, car sinon on pourrait trouver un point $\bar{x} \in K$ tel que $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)^c = \left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)\right)^c$ ce qui est impossible. On peut alors définir pour tout $x \in K$,

$$\alpha_i^\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c)}{\sum_{j=1}^n \operatorname{dist}(x, B(x_j,\varepsilon)^c)} \geq 0.$$

Les fonctions α_i^ε sont continues sur K et $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in K$. On pose $J_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) x_i$ pour tout $x \in K$.
Pour tout $x \in K$, on a alors

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)(x_i - x)\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)\|x_i - x\|.$$

Si $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$, alors $x \in B(x_i,\varepsilon)$, par conséquent,

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = \varepsilon. \tag{7.1}$$

En notant $K_\varepsilon := \operatorname{Conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on a que $K_\varepsilon \subset K$ car K est convexe. De plus K_ε est convexe et compact car c'est un sous ensemble de $\operatorname{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E dimension finie.

Comme J_ε est continue, alors $f_\varepsilon := J_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ est également continue. Le théorème du point fixe de Brouwer assure alors l'existence d'un $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Du fait que $K_\varepsilon \subset K$ et K est compact, on peut extraire une sous-suite (x_{ε_j}) et trouver un point $\bar{x} \in K$ tels que $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x}$. On en déduit alors que

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leftarrow \|f(x_{\varepsilon_j}) - x_{\varepsilon_j}\| = \|f(x_{\varepsilon_j}) - J_{\varepsilon_j}(f(x_{\varepsilon_j}))\| \le \varepsilon_j \to 0,$$

ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. □

Corollaire 8. *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné et $f : C \to C$ une fonction continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact. Alors f admet un point fixe dans C.*

Démonstration. L'ensemble $A := \overline{f(C)}$ est compact par hypothèse, mais pas convexe.
On considère alors l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$ qui est convexe mais pas fermé (dim infinie).
On considère alors l'ensemble convexe fermé $K := \overline{\mathrm{Conv}(A)}$ et nous admettons temporairement qu'il est compact.
Comme $f(C) \subset C$, alors $A = \overline{f(C)} \subset C$ car C est fermé, puis $\mathrm{Conv}(A) \subset C$ car C est convexe, et enfin $K = \overline{\mathrm{Conv}(A)} \subset C$ car de nouveau C est fermé. Par conséquent, $f : K \to K$ et le théorème du point fixe de Schauder montre l'existence d'un point fixe de f dans $K \subset C$.
Il reste à montrer que K est compact. Soit $\varepsilon > 0$, comme A est compact, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \dots, x_m \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon/2) = \{x_1, \dots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

Comme $\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ est un sous ensemble convexe de $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_m\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ est convexe et compact. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $y_1, \dots, y_n \in \mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ tels que

$$\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon/2) = \{y_1, \dots, y_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

On en déduit alors

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \{y_1, \dots, y_n\} + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon),$$

ce qui montre que $\mathrm{Conv}(A)$ est précompact et donc compact. □

7.2 Equations semi-linéaires

On considère tout d'abord l'EDP sous forme divergence suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On rappelle tout d'abord la définition et quelques propriétés des *fonctions de Carathéodory.*

Définition 25. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $f(\cdot, z)$ est mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{R}^m$.*

Lemme 5. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $w : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable.*

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné

(H_2) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$ telle que $|f(x, s)| \leq a(x)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

(H_3) Pour tout $1 \leq i, j \leq N$, les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x \in \emptyset \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 7.4. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\,dx \quad \textit{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On considère l'application $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $u \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution $v = T(u) \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

L'existence et l'unicité de v découle du théorème de Lax-Milgram puisque la fonction $x \mapsto f(x, u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$ d'après le Lemme et l'hypothèse (H_2), $|f(x, s)| \leq a(x) \in L^2$.
En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, en utilisant les hypothèses (H_2), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x, u(x))v(x)\,dx \leq \|a\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité de Poincaré donne

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui montre que

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R := \frac{C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda}.$$

En notant $K := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R\}$, nous avons montré que $T : L^2(\Omega) \to K$. Par ailleurs, l'ensemble K est convexe et le théorème de Rellich montre que K est compact dans $L^2(\Omega)$.
Pour pouvoir appliquer Schauder il reste à montrer que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continue. Pour ce faire, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et on note $v_n :=$

$T(u_n) \in H_0^1(\Omega)$. L'argument précèdent montre que $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$. On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$\begin{aligned} v_{\sigma(n)} &\to v && \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} &\to v && \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ u_{\sigma(n)} &\to u && \text{p.p. sur } \Omega. \end{aligned}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, on a que $f(x, u_{\sigma(n)}(x)) \to f(x, u(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$ et l'hypothèse (H_2) montre que $|f(x, u_{\sigma(n)}(x))| \leq a(x)$ p.p. tout $x \in \Omega$ avec $a \in L^2(\Omega)$. Le théorème de la convergence dominée montre alors que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $L^2(\Omega)$.
Nous avons donc montré que $T : K \to K$ est continue et que K est sous ensemble un convexe et compact de $L^2(\Omega)$. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe $u \in K$ de T dans K, i.e., $T(u) = u$, autrement dit

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

□

On peut aussi considérer un problème un peu plus général en autorisant f de dépendre de ∇u. On s'intéresse alors à l'EDP suivante.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

Pour ce faire on rajoute l'hypothèse suivante :

(H_2') $f : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$, $b > 0$ et $0 < \beta < 1$ tels que $|f(x, s, \xi)| \leq a(x) + b(|s|^\beta + |\xi|^\beta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 7.5. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2') et (H_3), il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (7.2), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On définit l'application $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ par $v = T(u)$, où $v \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que v est unique car $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$. En effet, d'après le Lemme 5, cette fonction est mesurable, et d'après l'hypothèse (H_2'), on a

$$|f(x, u(x), \nabla u(x))| \leq a(x) + b(|u(x)|^\beta + |\nabla u(x)|^\beta) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Comme la fonction $a + b(|u|^\beta + |\nabla u|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (car $\beta < 1$ et Ω est borné), on en déduit que $f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$.
En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle et en utilisant les hypothèses (H_2'), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}\lambda \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)\, dx &= \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) v(x)\, dx \\ &\leq \Big(\|a\|_{L^2(\Omega)} + b(\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après les inégalité de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on a

$$\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} \leq \big(\|u\|^\beta_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^\beta_{L^2(\Omega)} \big) |\Omega|^{(1-\beta)/2} \leq C \|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}$$

où $C > 0$ ne dépend que de N, Ω et β.
Par conséquent, en utilisant de nouveau l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_*(1 + \|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}),$$

où $C_* > 0$ est une constante ne dépendant que λ, N, $\|a\|_{L^2(\Omega)}$, b, Ω et β. Comme $\beta < 1$, on peut trouver un $R > 0$ tel que $C_*(1 + R^\beta) \leq R$ de sorte que si $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$, alors $\|T(u)\|_{H^1_0(\Omega)} = \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. Si C désigne la boule fermé dans $H^1_0(\Omega)$ centre 0 et rayon R (un ensemble convexe, fermé et borné), on a donc montré que $T : C \to C$.
Montrons que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1_0(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$ et on note $v_n := T(u_n)$. L'argument précédent montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et donc, on peut extraire une sous-suite et trouver une fonction $v \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$v_{\sigma(n)} \to v \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega).$$

Par ailleurs, la réciproque de la convergence dominée montre qu'on peut encore extraire des sous-suites et trouver des fonctions G et $H \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \to u & \text{p.p. sur } \Omega, \\ \nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u & \text{p.p. sur } \Omega, \\ |u_{\sigma(n)}| \leq G & \text{p.p. sur } \Omega, \\ |\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H & \text{p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

La fonction f étant de Carathéodory, on en déduit que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω. Par suite, l'hypothèse (H_2') montre que

$$|f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq a + b(|G|^\beta + |H|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

car $\beta < 1$. Le théorème de la convergence dominée implique que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x)) w(x)\, dx$$

$$\rightarrow$$

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w\in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons enfin que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C et $v_n := T(u_n) \in C$. Comme C est borné, on en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire des sous-suites et trouver des fonctions $u, v\in H_0^1(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \to u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),\\ v_{\sigma(n)} \to v & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).\end{cases}$$

Par ailleurs, le théorème de Rellich montre que

$$v_{\sigma(n)} \to v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{7.3}$$

En notant $h_n := f(\cdot, u_n, \nabla u_n)$ on déduit de (H_2') que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que

$$h_{\sigma(n)} \to h \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \tag{7.4}$$

(notons qu'à ce stade de la preuve, on n'a pas que $h = f(\cdot, u, \nabla u)$).

Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u_{\sigma(n)}(x),\nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w\in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega h(x)w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w\in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $w = v_{\sigma(n)}$ comme fonction test, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla v_{\sigma(n)}(x)\,dx &= \int_\Omega h_{\sigma(n)}v_{\sigma(n)}(x)\,dx\\ &\to \int_\Omega h(x)v(x)\,dx = \int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)\,dx,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (7.3), (7.4). D'après la propriété de coercivité (H_3), on a donc

$$\lambda\int_\Omega |\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}|^2\,dx \le \int_\Omega A(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})\cdot(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})\,dx \to 0$$

ce qui montre que $\nabla v_{\sigma(n)} \to \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, ou encore $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Ceci montre que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le Corollaire du Théorème de Schauder qui montre que l'application T admet un point fixe dans C. Il existe donc un $u\in C\subset H_0^1(\Omega)$ tel que $T(u) = u$, i.e.,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } v\in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Chapitre 8

Principe du maximum

Nous avons vu au Chapitre 1 le principe du maximum pour les fonctions harmoniques. Nous allons voir que ce principe s'étant aux opérateurs à forme divergence $-\mathrm{div}(A\nabla u)$. On va énoncer deux principes du maximum. Le premier concerne les sous-solutions fortes.

Théorème 8.1. *(Principe du maximum) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, A des coefficients elliptiques de classe C^1 et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vérifiant*

$$\mathrm{div}(A\nabla u) \geq 0.$$

Alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Démonstration. Si x_0 est un point de maximum à l'intérieur de Ω, alors $\nabla u(x_0) = 0$ et les valeurs propres de $D^2u(x_0)$ sont négatives (on rappelle que $D^2u(x_0)$ est une matrice symétrique donc diagonalisable). Supposons dans un premier temps que $\mathrm{div}(A\nabla u)(x_0) > 0$. Alors on arrive vite à une contradiction. En effet, dans le cas du Laplacien, c'est à dire si $A = Id$ alors

$$\Delta u = \mathrm{tr} D^2u(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \leq 0$$

ce qui est une contradiction. Si A n'est pas l'identité, on raisonne de manière analogue mais en faisant un changement de variables. En effet, $D^2u(x_0)$ est une matrice diagonalisable dans la base orthonormée (ξ_k). Une manière de l'écrire est de dire que

$$D^2u(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_k \xi_k \otimes \xi_k.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} div(A\nabla u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= 0 + \mathrm{tr}(AD^2(u)) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i tr(A(x_0)\xi_k \otimes \xi_k) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle A(x_0)\xi_k, \xi_k\rangle \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \leq 0 \end{aligned}$$

par ellipticité, ce qui est une contraditction.
Maintenant si $\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$ on n'a pas de contradiction immédiate. Donc il faut un argument plus élaboré qui se ramène au cas précédent. Pour cela on pose

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}.$$

Un calcul simple montre que

$$\mathrm{div}(A\nabla \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \varepsilon\gamma(\partial_{x_1} a_{11} + a_{11}\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

On sait que $a_{11} > 0$ car la coercivité donne $\langle Ae_1, e_1\rangle = a_{11} \geq \lambda$.
On peut trouver $\gamma > 0$ tel que $\gamma a_{11} > \|A\|_{C^1}$ de sorte que $\mathrm{div}(A\varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ et donc $\mathrm{div}(A\nabla u_\varepsilon) > 0$.
Ainsi, en raisonnant comme au début de la preuve, on sait que

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) \leq \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}).$$

Enfin, en faisant tendre ε vers 0, sachant que $\varepsilon e^{\gamma x_1}$ converge uniformément vers 0 dans Ω on en déduit le résultat. □

Remarque 15. *On en déduit qu'une solution vérifiant $-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$ dans Ω atteint à la fois son minimum et son maximum sur le bord de Ω, c'est à dire $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$*

Corollaire 9. *Si Ω est un ouvert régulier, A des coefficients elliptiques C^1 et g continue, alors il existe au plus une solution forte $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ au problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Démonstration. Si on a deux solutions u et v alors $w = u - v$ vérifie

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla w) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donc $\max w = 0$ et $\min w = 0$ ce qui entraine $w = 0$. □

Rappel : dans le cas du Laplacien ($A = Id$) nous avons démontré un théorème plus fort dit "principe du maximum fort" qui est le suivant et dont la preuve donnée au chapitre 1 était basée sur la formule de la moyenne :

Proposition 28 (Principe du maximum fort)**.** *Soit* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *une fonction vérifiant* $\Delta u \geq 0$ *dans* Ω*. Si* Ω *est connexe et s'il existe un point* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$*, alors* u *est constante.*

Ce résultat s'étend aux opérateurs elliptiques mais la preuve est plus compliquée. Elle est basée sur le "principe de Hopf" dont malheureusement nous n'avons pas le temps de voir en détail dans ce cours.
Le principe du maximum a plusieurs intérêts et permet d'obtenir par exemple les choses suivantes que nous ne développerons pas dans ce cours :

1. estimations de solutions pour la norme L^∞
2. unicité pour certains problèmes elliptiques
3. méthode de Perron pour l'existence de solutions (avec les notions de sur-solution et sous-solution)
4. solutions au sens de la viscosité...

Chapitre 9

Problème aux valeurs propres

9.1 Introduction

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné, on souhaite étudier le problème "spectral" suivant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

λ est alors une *valeur propre* de l'opérateur $-\mathrm{div}(A\nabla u)$, et une solution u est un *vecteur propre* associée à la valeur propre λ.

9.2 Théorie Spectrale des opérateurs autoadjoints compacts (Rappels)

Définition 26. *Soit E Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.*

— **Ensemble résolvant**

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \, ; \, (T - \lambda Id) \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\}$$

— **Le spectre**

$$\sigma(T) := \mathbb{R} \setminus \rho(T)$$

— **Valeur propre** $\lambda \in VP(T)$ *si*

$$Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}.$$

$Ker(T - \lambda Id)$ *est l'espace propre associé à* λ.

Remarque : $VP(T) \subset \sigma(T)$ mais inclusion stricte en général.

9.3 Opérateurs compacts

Définition 27. *Soit E Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est compact si $T(B_E)$ est relativement compact dans E.*

Théorème 9.1. *(conséquence de "l'aternative de Fredholm") Soit E Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ un* **Opérateur compact**. *Alors on a*

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
3. *l'une des situation suivantes*
   — *ou bien* $\sigma(T) = 0$
   — *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini*
   — *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

9.4 Opérateurs autoadjoints compacts

Définition 28. *Soit H un* **Hilbert**, $T \in \mathcal{L}(H)$. *On dit que T est* **auto-adjoint** *si*

$$\forall u, v \in H, \quad \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$$

Théorème 9.2. *Soit H Hilbert séparable de dimension infini, $T \in \mathcal{L}(H)$ un* **Opérateur auto-adjoint compact** *non nul. Alors on a*

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
3. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.
4. *les espaces propres sont de dimension finie.*
5. *H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Donc un opérateur autoadjoint compact T se "diagonalise" i.e. tout vecteur $u \in H$ s'écrit

$$u = \sum_k \alpha_k u_k$$

et

$$T(u) = \sum_k \alpha_k \lambda_k u_k.$$

9.5 Retour sur le problème de Dirichlet

On souhaite "diagonaliser" l'opérateur

$$T = -\mathrm{div}(A\nabla u)$$

mais ce n'est pas un opérateur compact.
Par contre il est "à résolvante compacte". En effet, il est plus commode de regarder l'opérateur **Résolvante** $(-\mathrm{div}(A\nabla u))^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.
On pose $H = L^2(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert séparable. Pour tout $f \in L^2$ on note $u_f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, l'unique solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On note $T(f) = u_f$ et on remarque que c'est un opérateur linéaire continu de $L^2 \to L^2$ car on a l'estimation

$$\|T(f)\|_{L^2} \leq \|u_f\|_{H^1} \leq C \ \|f\|_2.$$

Cette même inégalité montre aussi

$$T(B_{L^2}(0,1)) \subset B_{H_0^1(\Omega)}(0,1)$$

qui est relativement compacte dans L^2. Donc T est un **opérateur compact.**
Supposons que $A(x)$ **soit symétrique** pour tout x. Alors montrons que T est autoadjoint. En effet, si $f, g \in L^2$ et si u_f et u_g sont les solutions faibles associées

$$\begin{aligned}
\langle T(f), g\rangle &= \int_\Omega u_f g \ dx \\
&= \int_\Omega \ \nabla u_f \cdot (A\nabla u_g) \ dx \quad \text{(car } u_g \text{ est solution faible)} \\
&= \int_\Omega \ {}^tA\nabla u_f \cdot \nabla u_g \ dx \\
&= \int_\Omega \ A\nabla u_f \cdot \nabla u_g \ dx \quad \text{(car } A \text{ est symétrique)} \\
&= \int_\Omega \ f u_g \ dx \quad \text{(car } u_f \text{ est solution faible)} \\
&= \langle f, T(g)\rangle
\end{aligned}$$

et f est bien auto-adjoint.
T est donc autoadjoint compact sur L^2. Il possède donc un spectre discrêt λ_n avec $\lambda_n \to 0$ et il existe une base de L^2 formé de vecteurs propres.

De plus $\lambda_0 = 0$ est trivial : $T(f) = 0$ alors $-\text{div}(\nabla u_f) = 0 = f$ donc $f = 0$. Donc la seule fonction propre possible pour la valeur propre 0 est la fonction nulle. Donc finalement il existe une base de L^2 formé de vecteurs propres avec $\lambda_n \neq 0$.

Par ailleurs $\lambda_n > 0$: si A est coercif (de constante $c > 0$), et si $T(u) = \lambda u$ alors

$$\int_\Omega A \ \nabla\lambda u \cdot \nabla u \ dx = \int_\Omega u^2 \ dx$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_\Omega u^2 \ dx = \int_\Omega A \ \nabla\lambda u \cdot \nabla u \ dx \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx \geq 0$$

Finalement : si $T(u) = \lambda u$ alors par définition, λu est solution faible de

$$-\text{div}(A\nabla\lambda u) = u \Leftrightarrow -\text{div}(A\nabla u) = \frac{1}{\lambda}u$$

Donc si on pose $\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n}$ on a $\sigma_n \to +\infty$ et σ_n est valeur propre de $-\text{div}A\nabla$.

Enfin : si A et Ω sont C^∞ et que u est une fonction propre, alors $u \in C^\infty$.

9.6 Bilan

Théorème 9.3. *(valeurs propres Dirichlet) Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ (de classe C^∞) et soit A des coefficients coercifs réguliers ($C^\infty(\overline{\Omega})$). Alors il existe une base Hilbertienne u_n de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite de réels $\lambda_n > 0$ avec $\lambda_n \to +\infty$ tels que*

$$u_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$$

$$-\mathrm{div}(A\nabla u_n) = \lambda_n u_n.$$

On dit que les λ_n sont les valeurs propres de $-\mathrm{div}A\nabla$ (avec condition de Dirichlet) et les u_n sont les vecteurs propres associés.

9.7 Étude de λ_1, la première valeur propre Dirichlet

On s'intéresse maintenant à λ_1, la première valeur propre non nulle. On souhaite montrer le théorème suivant.

Théorème 9.4. *Soit Ω un ouvert borné régulier, et λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet. Alors l'espace propre associé est de dimension 1, engendré par une fonction propre u vérifiant $u > 0$ sur Ω. De plus*

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx}.$$

Démonstration. On sait déjà par l'inégalité de Poincaré que

$$m := \inf_{H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx} \geq C > 0.$$

Soit u_n, une suite minimisante et soit $v_n := u_n/\|u_n\|_{L^2}$. Alors

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx = \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx}{\int_\Omega v_n^2 \, dx} = \frac{\|u_n\|_{L^2}^2}{\|u_n\|_{L^2}^2} \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx}{\int_\Omega u_n^2 \, dx} \to inf$$

donc v_n est encore une suite minimisante, et on a, n assez grand,

$$\sup_n \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx \leq C.$$

par ailleurs v_n est bornée dans L^2, donc dans H_0^1. Il existe donc $v \in H_0^1$ et une sous suite telle que $v_{n_k} \to v$ fortement dans L^2 et faiblement dans H_0^1. Par semicontinuité inférieure de la norme relativement à la convergence faible on a

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx = m \Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = m.$$

et donc v est un minimiseur, et donc l'inf plus haut est en réalité un min.
Montrons maintenant que v est solution d'un problème aux valeurs propres. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est quelconque on a $v + tu \in H_0^1(\Omega)$ pour tout t et donc

$$\begin{aligned} m = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 \, dx} &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla v + t\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega (v+tu)^2 \, dx} \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + t^2 |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega v^2 + 2tuv + t^2u^2 \, dx} \end{aligned}$$

d'où l'on tire (en utilisant $\int v^2 = 1$)

$$m(1 + 2t \int_\Omega uv + t^2u^2) \leq m + \int_\Omega 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + t^2|\nabla u|^2 \, dx$$

$$2tm \int_\Omega uv + t^2u^2 \leq \int_\Omega 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + t^2|\nabla u|^2 \, dx$$

En divisant par $t > 0$ et en faisant $t \to 0$ puis en divisant par $t < 0$ et en faisant $t \to 0$ on en déduit

$$m \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, dx$$

On a donc démontré que v était solution faible de l'équation

$$-\Delta v = mv$$

c'est donc une fonction propre pour $-\Delta$ avec condition de Dirichlet, et m est une valeur propre. C'est en fait la plus petite valeur propre car si w est une fonction propre d'une autre valeur propre λ,

$$-\Delta w = \lambda w,$$

la formulation faible donne

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega w\varphi$$

avec $w = \varphi$ on trouve

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega w^2 \, dx \Rightarrow \lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx}{\int_\Omega w^2 \, dx} \geq m.$$

Récapitulons

On a démontré : il existe v qui minimise

$$m = \min_{H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx},$$

et alors v est solution de $-\Delta v = mv$ et $m = \lambda_1$, la plus petite valeur propre. On sait par ailleurs que si Ω est de classe C^∞ alors $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Reste à voir que l'espace propre est de dimension 1 (on dit alors que λ_1 est **simple**) et que $v > 0$ dans Ω (ou bien $v < 0$ dans Ω).

Soit E l'espace propre associé à λ_1 et soit $w \in E$ une fonction propre quelconque. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on sait que $v + tw$ est encore une fonction propre associée à la valeur propre λ_1, et donc (en utilisant la formulation faible on voit que) le quotient de Rayleigh de $v + tw$ vaut λ_1. Ceci démontre que $v + tw$ est aussi un minimiseur du problème définissant m.

Maintenant on pose $h = |v + tw|$. On remarque que $h \in H_0^1(\Omega)$ et le quotient de Rayleigh associé vaut toujours λ_1. On en déduit que h est une fonction propre et donc $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $-\Delta h = \lambda_1 h \geq 0$. [*Mémo* : Si $\Delta f \geq 0$ dans Ω alors $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$ et si le max est atteint à l'intérieur alors u est constante]. Par le principe du maximum on a

1. ou bien h est constante et donc $h = 0$ partout
2. ou bien le min de h est atteint au bord, et donc $h > 0$ dans Ω (car $h = 0$ dans Ω).

On sait que w n'est pas identiquement nulle. Soit x_0 un point quelconque de Ω tel que $w(x_0) \neq 0$. Alors il existe t tel que $v(x_0) + tw(x_0) = 0$, il suffit de prendre $t = \frac{-v(x_0)}{w(x_0)}$. Pour ce t particulier, la condition 2) n'est pas satisfaite. Donc 1) a lieu et donc on a montré que v était colinéaire à w et donc $dim(E) = 1$. En particulier v est colinéaire à h et à fortiori, $v > 0$ ou $v < 0$ dans Ω. $\square$