**Université de Lorraine** **2021-2022**

**EXAMEN EDP Elliptiques** – ANTOINE LEMENANT **M2 - MFA**

**Exercice 1.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory qui satisfait $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $s \in \mathbb{R}$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, montrer l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$-\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Exercice 2.** Soit $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$ une suite d'ouverts bornés et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un autre ouvert borné. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée.

Pour tout $n \geq 0$ on note $u_n$ la solution faible du problème de Dirichlet dans $\Omega_n$, c'est à dire $u_n \in H_0^1(\Omega_n)$ et vérifie :

$$\int_{\Omega_n} \langle \nabla u_n, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_{\Omega_n} f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_n). \tag{1}$$

On suppose dans cette question que $\Omega_n$ est une suite croissante pour l'inclusion, c'est à dire telle que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose de plus que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$.

1. Vérifier que pour tout $n$ on a $H_0^1(\Omega_n) \subset H_0^1(\Omega)$. (On peut donc considérer que $u_n \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $n$).
2. Montrer que $u_n$ est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$.
3. Montrer que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \Omega_n$ pour tout $n \geq n_0$.
4. En déduire que $u_n$ converge, à extraction de sous suite près, faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (et fortement dans $L^2(\Omega)$) vers l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1) dans $\Omega$.
5. On suppose désormais que $\Omega_n$ et $\Omega$ sont tous des ouverts $C^1$, que $f \in C^1(\overline{\Omega})$, et que
$$\sup_{x \in \partial\Omega_n} dist(x, \partial\Omega) =: d_n \to_{n\to+\infty} 0.$$
Sous ces hypothèses nous savons d'après le cours que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $u_n \in C^1(\overline{\Omega_n})$. En utilisant le fait que $u_n - u$ soit une fonction harmonique dans $\Omega_n$ et le principe du maximum, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u - u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Cd_n$. En déduire que
$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C'd_n,$$
où $C'$ peut dépendre de $C$ et de $\|f\|_2$ (et en particulier la convergence de $u_n$ vers $u$ a lieu fortement dans $H^1$).