Université de Lorraine **2021-2022**

EXAMEN EDP Elliptiques – Antoine Lemenant **M2 - MFA**

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$. On souhaite montrer l'existence d'une solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ à l'équation

$$-\mathrm{div}[A(u)\nabla u] = f,$$

avec $A(u) = 1 + \arctan(u^2)$.

1. Montrer que pour tout $v \in L^2(\Omega)$ il existe une solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ à l'équation
$$-\mathrm{div}[A(v)\nabla u] = f. \tag{1}$$
2. On définit $T : L^2 \to L^2$ l'opérateur qui a tout $v \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ de (1). Montrer que l'image de T est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.
3. Montrer que si $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ alors il existe une sous suite telle que $A(u_{n_k}) \to A(u)$ dans $L^2(\Omega)$. En déduire que l'opérateur T est continu sur L^2 et conclure à l'aide du théorème de Schauder.
4. Dans cette question on se place en dimension 1. On pose $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$ et $f = -1 \in L^2(\Omega)$. On note $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitive de $x \mapsto 1 + \arctan(x^2)$ qui s'annule en 0, autrement dit :
$$P(x) = \int_0^x 1 + \arctan(t^2)dt.$$
On ne cherchera pas à calculer P explicitement. Après avoir justifié que la fonction P admet un inverse de classe C^1 notée $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer la solution $u \in H^1_0(]0,1[)$ en fonction de ψ.

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $p > 1$ fixé et $f \in L^\infty(\Omega)$. On considère le problème

$$\min_{u \in W^{1,p}_0(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - p \int_\Omega uf \, dx \tag{2}$$

1. En considérant une suite minimisante, montrer qu'il existe un minimiseur $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ pour le problème (2).
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. En utilisant que
$$\frac{d}{dt}|x + ty|^p = p|x + ty|^{p-2}\langle x + ty, y\rangle,$$

et en comparant u à $u + t\varphi$, montrer que le minimiseur u trouvé à la question 1, est solution faible du problème de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{c} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f. \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right.$$

3. On rappelle l'inégalité de Young : si p et q sont conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

qui implique aussi immédiatement la variante suivante :

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\frac{a^p}{p} + \varepsilon^q \frac{b^q}{q}.$$

En prenant $\varphi^p u$ comme fonction test dans la formulation faible avec $\varphi \geq 0$ et supportée dans B_{2R}, ainsi que l'inégalité de Young, montrer que pour toute boule $B_{2R} \subset \Omega$ on a

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \leq C\left(R^{-p}\|u\|^p_{L^p(B_{2R})} + \|f\|_{L^q(B_{2R})}\|u\|_{L^p(B_{2R})}\right).$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de p.