Corrigé Exam 2022 - EDP

Exercice 1

on travaille dans l'espace $H = L^2(\Omega)$ qui est un Banach.

on considère pour tout $u \in H$ l'unique solution (faible) $v \in H^1_0(\Omega)$ du problème

$$-\mathrm{div}(a(x,u)\nabla v) = f \qquad (1)$$

Puisque l'on travaille dans $H^1_0(\Omega)$, cette solution faible résout (1) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

l'existence et unicité de v est donnée par le théorème de Lax-Milgram car

$$\langle a(x,u)\xi, \xi\rangle_{L^2} \geq \alpha \|\xi\|^2_{L^2}$$

donc a est bien elliptique.

~~Ch~~ en Prenant v comme fonction test dans (1) on trouve

$$\alpha \|\nabla v\|^2_{L^2} \leq \int_\Omega a(x,u)\nabla v \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \leq \|f\|_2 \|v\|_2$$

$$\leq \|f\|_2 \, C_p \|\nabla v\|_2$$

où C_p est la constante de Poincaré.

Ceci donne

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|f\|_2$$

de plus $\|v\|_2 \leq C_p \|\nabla v\|_2 \leq \dfrac{C_p^2}{\alpha} \|f\|_2$

donc $\|v\|_{H^1_0} \leq \dfrac{2C_p^2}{\alpha} \|f\|_2$

Donc si l'on définit l'opérateur

$$T : u \longmapsto v$$
$$L^2 \longrightarrow H^1_0$$

on voit que $T(L^2) \subseteq \overline{B}_{H^1_0(\Omega)}(0, R_0)$

où $R_0 = \dfrac{2C_p^2}{\alpha} \|f\|_2$

D'après Poincaré on a aussi $B_{H^1_0}(0, R_0) \subseteq B_{L^2}(0, C_p$

donc si $K = \overline{B_{L^2}}(0, C_p R_0)$

on obtient que $T : K \longrightarrow K$

K est un convexe fermé borné

$T(K) \subset B_{H^1_0}(0, R_0)$ est rel. compact dans L^2

par Rellich.

Reste à prouver que T est continue

soit $u_n \longrightarrow u$ dans L^2

alors $\exists$ s. suite ; $u_{n_k} \longrightarrow u$ p.p.

dans ce cas $a(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow a(x, u(x))$ p.p.

et $|a| \leq \beta$ donc par c.v dominée,

$$a(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow a(x, u(x)) \quad \text{dans } L^2.$$

$T(u_{n_k}) = v_{n_k}$ est bornée dans H^1.

Quitte à extraire une s. suite, $v_{n_k} \longrightarrow v$ faiblement dans $H^1 \Rightarrow \nabla v_{n_k} \rightharpoonup \nabla v$. (faible L^2)

d'après la formulation variationnelle,

$$\forall w \in H_0^1, \int_\Omega \underset{\downarrow \text{fort } L^2}{a(x, u_{n_k}(x))} \underset{\downarrow \text{faible } L^2}{\nabla v_{n_k}} \nabla w = \int_\Omega f w$$

$$\int_\Omega a(x, \cancel{u}(x)) \nabla v \nabla w = \int f w$$

(par limite fort/faible)

on en déduit que $T(u) = v$ ~~donc~~ et par unicité, toute la suite c.v vers $T(u)$.

Ceci montre que T est continue donc par pt fixe de Schauder $\exists$ une point fixe donc solution de

$$-\operatorname{div}(a(x,u)\nabla u) = f.$$

Exercice 2

1. $u \in H_0^1(\Omega_n) \Leftrightarrow \exists\, \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega_n)$;
$\varphi_n \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega_n)$.
mais en particulier $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ (car $\Omega_n \subset \Omega$)
donc $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. En appliquant (1) avec $\varphi = u_n$ on trouve

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega_n} f u_n \le \|f\|_2 \|u_n\|_2$$
$$\le \|f\|_2 \, C_p \|\nabla u_n\|_2$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right)^{1/2} \le C_p \|f\|_2$$

où C_p est la constante de Poincaré dans Ω.

de plus $\|u_n\|_2 \le C_p \|\nabla u_n\|_2 \le C_p^2 \|f\|_2$

donc $\boxed{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le 2 C_p^2 \|f\|_2}$

3. Soit $K \subseteq \Omega$ compact

on raisonne par l'absurde. Si l'énoncé est faux alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k_n \geq n$ tel que

$K \not\subseteq \Omega_{k_n}$. Il existe donc $x_{k_n} \in K \setminus \Omega_{k_n}$

Comme K est compact, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que

$x_{k_n} \longrightarrow x$ dans K

Cette suite a la propriété que

(1) $x_{k_n} \in \Omega_{k_n}^c$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k \in \Omega_n^c$ $\forall n \leq k_n$
(par inclusion)

Maintenant de deux choses l'une :

1) ou bien $x \in \Omega$ mais alors comme

~~(Ω est ouvert, $x_{k_n} \in$)~~

$\Omega = \bigcup \Omega_n$, $\exists n_0$; $x \in \Omega_{n_0}$

et Ω_{n_0} est ouvert donc $x_{k_n} \in \Omega_{n_0}$

$\forall n$ grand, ce qui contredit (1)

2) ou bien $x \notin \Omega$ ce qui est absurde car $x \in K \subseteq \Omega$.

Dans tous les cas on abouti à une contradiction donc finalement la propriété désirée est démontrée.

4. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors par 3. $\exists n_0$; $\forall n \geq n_0$,
$\varphi \in C_c^\infty(\Omega_n)$. par (1) on a

$$\int_{\Omega_n} < \nabla u_n, \nabla \varphi > dx = \int_{\Omega_n} f \varphi \, dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} < \nabla u_n, \nabla \varphi > dx = \int_{\Omega_n} f \varphi \, dx . \qquad (*)$$

or ∇u_n est borné dans L^2 (par 2.) donc
$\exists$ sous-suite telle que $u_{n_k} \longrightarrow u$ faible $H_0^1(\Omega)$
et $u \in H_0^1(\Omega)$. En passant à la limite
dans $(*)$ on trouve

$$\int_{\Omega} < \nabla u, \nabla \varphi > dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx .$$

donc u est solution faible dans Ω.
Cette solution est unique (par Lax-Milgram)
donc la suite totale converge vers cet
unique point d'adherence —

~~6~~. 5. On sait que $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $-\Delta u = f \in C^1(\bar{\Omega})$
donc par regularité elliptique $u \in C^1(\bar{\Omega})$
Puisque $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et que Ω est C^1-regulier,
il est clair que :

$$\|u\|_{L^\infty(A_n)} \leq C\, d_n$$

où C dépend de $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$

et $A_n = \{ x \in \bar{\Omega} \ ; \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq d_n \}$

en effet si $x \in A_n$, $\exists\, y \in \partial\Omega$; $\|x - y\| \leq d_n$

ainsi, $$|u(x) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{u(y)}| \leq \int_0^1 |\langle \nabla u(tx + (1-t)y), x - y\rangle| \, dt$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^\infty} |x - y| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} d_n$$

(on considère $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ après l'avoir prolongeé par 0 en dehors de Ω)

maintenant $\Omega = A_n \cup \Omega_n$

sur Ω_n on considère la fonction $u - u_n$

on a $\Delta(u - u_n) = 0 \Rightarrow u - u_n$ est harmonique

sur $\partial\Omega_n$ on a $|u - u_n| \leq C d_n$

par principe du maximum on a $|u - u_n| \leq C d_n$ dans Ω_n. or $u - u_n = u$ dans A_n donc finalement $\|u - u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C d_n$

en appliquant (1) avec $\varphi = u_n \in H^1_0(\Omega_n)$

on trouve : $$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega_n} f u_n$$

on a aussi $u_n \in H^1_0(\Omega_n) \subseteq H^1_0(\Omega)$ donc en utilisant que u est solution faible avec u_n comme fonction test on trouve

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_n = \int_\Omega f u_n$$

enfin, en ~~ap~~ appliquant (1) avec $\varphi = u$ on a aussi $\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f u$

tout ceci mis ensemble donne :

$$\underbrace{\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^2}_{\|u-u_n\|_{H^1_0}} = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_{\Omega_n} \langle \nabla u \cdot \nabla u_n \rangle$$

$$= \int_\Omega f u + \int_\Omega f u_n - 2\int_\Omega f u_n$$

$$= \int_\Omega f(u - u_n)$$

$$\leq \|f\|_2 \, \|u - u_n\|_2 \quad \text{(par Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leq \|f\|_2 \, \|u - u_n\|_\infty \, |\Omega|^{1/2}$$

$$\leq C \, d_n.$$