Corrigé de l'examen de substitution
" EDP Elliptiques " 28/02/2022

Exercice 1.

$\boxed{1.}$ pour $v \in L^2(\Omega)$ on a $1 \leq A(v) \leq 1 + \frac{\pi}{2}$
donc la forme bilinéaire

$$B(u,w) = \int_\Omega A(v) \nabla u \cdot \nabla w \quad \text{sur} \quad H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

satisfait la condition d'ellipticité.
Par ailleurs la forme linéaire $u \longmapsto \int_\Omega uf$ est continue sur H_0^1 donc d'après Lax-Milgram il existe une solution faible u à

$$-\operatorname{div}\left[A(v) \nabla u\right] = f \ .$$

$\boxed{2.}$ Pour tout u solution faible on a

$$\int_\Omega A(v) \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

(formulation faible)
en particulier pour $\varphi = u$ on trouve

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \int_\Omega A(v) \nabla u \cdot \nabla u = \int f u \leq \|f\|_2 \|u\|_2$$
$$\leq C\|f\|_2 \|\nabla u\|_2$$

(par Poincaré)

$$\Rightarrow \qquad \|\nabla u\|_2^2 \leq C\|f\|_2 \ .$$

on en déduit que l'image de T

est contenue dans $B_{\|\|_{H^1_0}}(0, C\|f\|_2) \subseteq H^1_0(\Omega)$

qui est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ d'après

Rellich.

$\boxed{3.}$ si $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ alors il existe une sous-suite telle que $u_n \to u$ presque-partout

ce qui implique $A(u_n) \to A(u)$ presque partout

de plus $\|A(u_n)\|_\infty \leq 1 + \frac{\pi}{2}$

donc comme Ω est borné, par convergence dominée on a $A(u_n) \to A(u)$ dans $L^2(\Omega)$

en passant à la limite dans la formulation faible on a

$$\int_\Omega A(v_{n_k}) \nabla u_{n_k} \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega u_{n_k} f ,$$

(comme $\|\nabla u_n\| \leq C\|f\|_2$ on peut extraire une sous suite telle que $u_{n_k} \to u$ faiblement dans H^1_0)

$$\longrightarrow \int_\Omega A(v) \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega u f$$

Ceci implique que u est solution faible de $-\mathrm{div}(A(v)\nabla u) = f$.

autrement dit $T(v_{n_k}) \longrightarrow T(v)$

et T est continue.

(la convergence de la suite totale découle de l'unicité de la limite)

D'après le théorème de Schauder appliqué avec $H = L^2(\Omega)$, $T : H \to H$, on en déduit qu'il existe un point fixe pour T, i.e $T(u) = u$ soit

$$-\mathrm{div}(A(u)\nabla u) = f$$

$\boxed{4.}$ P est la primitive d'une fonction continue donc $P \in C^1$ et $P'(x) = 1 + \arctan(x^2) > 0$ donc P est strictement croissante. Elle est donc bijective et admet un inverse

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

l'équation s'écrit :

$$-\left(\left(1+\arctan(u^2)\right)u'\right)' = -1$$

$$u(0)=0 \quad , \quad u(1)=0 \qquad (\text{car } u \in H^1_0(\Omega))$$

supposons $u \in C^2(]0,1[)$.

On primitive :

$$\underbrace{\left(1+\arctan(u^2)\right)u'}_{= P(u)'} = t + C_0$$

ce qui donne $P(u)' = t + C_0$

on primitive une nouvelle fois :

$$P(u) = \frac{t^2}{2} + C_0 t + C_1 \qquad C_0, C_1 \in \mathbb{R}.$$

ainsi :

$$u(t) = \Psi\left(\frac{t^2}{2} + C_0 t + C_1\right) \quad \text{car } \Psi \circ P = Id.$$

or $u(0) = 0 \Rightarrow \Psi(C_1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
(car $P(0)=0$)

$u(1) = 0 \Rightarrow \Psi\left(\frac{1}{2} + C_0\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + C_0 = P(0) = 0$

$\Rightarrow C_0 = -1/2$

Conclusion $\boxed{u(t) = \Psi\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)}$

Exercice 2

1. D'après Young et Poincaré ;

$$\left|\int_\Omega uf\right| \leq \left(\int_\Omega u^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega f^q\right)^{1/q} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}\left(\int_\Omega f^q\right)^{1/q}$$

$$\leq C\,\varepsilon^p \int_\Omega |\nabla u|^p + C\,\varepsilon^{-q}\int_\Omega f^q$$

d'où $\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - p\int fu \geq -C\int_\Omega f^q$

et $\inf_u \int_\Omega |\nabla u|^p - p\int_\Omega fu > -\infty$

on peut donc considérer une suite minimisante

u_n vérifiant $\sup_n \int_\Omega |\nabla u_n|^p - p\int_\Omega f u_n \leq C$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq C + p\int f u_n$$

$$\leq C + p\,\|f\|_q\,\|u_n\|_p$$

$$\leq C + pC\,\|f\|_q\,\|\nabla u_n\|_p$$

$\Rightarrow$ (par Young encore) u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

il existe une sous-suite qui converge faible $W^{1,p}(\Omega)$. Par semi-continuité inférieure on obtient que la limite faible est un minimiseur.

$\boxed{2.}$ soit u le minimiseur alors

$$u + t\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

et $$\frac{d}{dt} F(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = 0$$

où $$F(u+t\varphi) = \int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^p dx - p\int_\Omega (u+t\varphi) f$$

$$\frac{d}{dt} F(u+t\varphi) = p\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^{p-2} \langle \nabla u + t\nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle$$

$$- p\int \varphi f$$

donc pour $t=0$ on trouve :

$$\boxed{p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle - p\int_\Omega \varphi f = 0 \quad \forall \varphi}$$

$\boxed{3.}$ on injecte $\varphi^p u$ dans la formulation faible. (il s'agit de la preuve de Caccioppoli vue en cours).

$$p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(\varphi^p u)\rangle - p\int_\Omega \varphi u f = 0$$

$$\Rightarrow p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \varphi^p \nabla u\rangle + |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, p\varphi^{p-1} u \nabla\varphi\rangle = p\int_\Omega \varphi^p u f$$

$$\Rightarrow p\int_\Omega \varphi^p |\nabla u|^p + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} p u \varphi^{p-1}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle}_{A} = \underbrace{p\int \varphi^p u f}_{B}$$

par Hölder et Young :

$$|A| \leq \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}\varphi^{p-1}\right)\left(p\, u |\nabla\varphi|\right)$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}\varphi^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}\left(\int_\Omega p^p |u|^p |\nabla\varphi|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^p \varphi^p + C(\varepsilon)\int_\Omega p^p |u|^p |\nabla\varphi|^p$$

car $(p-1)q = p$

et $|B| \leq c \;\|u\|_{L^p(B_{2R})}\|f\|_{L^q(B_{2R})}$

donc $\boxed{\int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx \leq \int_\Omega \varphi^p |\nabla u|^p \leq C\frac{1}{R^p}\int_{B_{2R}} |u|^p + C\|u\|_{L^p(B_{2R})}\|f\|_{L^q(B_{2R})}}$