

Fonctions BV, Théorème Rang-1 et mesures \mathcal{A} -free

Antoine Lemenant

24 août 2022

Ce document est issu de 2 exposés donnés en décembre 2021 au groupe de travail EDP de l'IECL (Nancy). Le but était de comprendre la preuve du théorème de De Philippis et Rindler (2016) qui redémontre et généralise dans un cadre beaucoup plus étendu le fameux théorème dit "Rang-1" d'Alberti (1993).

Nous commencerons par des rappels sur les mesures vectorielles, puis des fonctions BV avant de passer à la preuve de De Philippis et Rindler.

Références : Pour les chapitres 1-2-3 j'ai utilisé le livre de F. Maggi "Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems" ainsi que le livre de Ambrosio-Fusco-Pallara. Le chapitre 4 est quant à lui essentiellement basé sur l'article original de De Philippis et Rindler (Ann. Math. 2016), ainsi qu'un proceeding des mêmes auteurs dont je me suis fortement inspiré qui résume déjà très bien leur preuve.

Table des matières

1	Mesures de Radon vectorielles	2
1.1	Variation totale	3
1.2	Décomposition polaire	3
1.3	Convergence faible	3
1.4	Radon-Nicodým-Lebesgue-Besicovitch	4
2	Rectifiabilité	4
2.1	Mesures de Hausdorff	5
2.2	Rectifiabilité	5
3	Fonctions BV	6
3.1	Définition(s)	6
3.2	Exemples	6
3.2.1	Exemples en dimension 1	6
3.2.2	Exemple de saut en dimension N	7
3.3	Structure de BV et théorème "rang-1"	8

4	Théorème de De Philippis et Rindler	10
4.1	Démonstration du théorème	11

1 Mesures de Radon vectorielles

Il faut bien distinguer 2 classes de mesures : les mesure **positives** c'est à dire **scalaires**, versus les mesures **vectorielles**, i.e. à valeur \mathbb{R}^N (dont fait partie en particulier les mesures signées). En effet, la théorie classique des mesures positives ne s'étant pas directement aux mesures vectorielles et il convient de les définir proprement.

Tout d'abord on rappelle la notion classique de mesure *positive* et mesure de *Radon positive* (scalaire).

Definition 1.1 (Mesure de Radon positive). 1. Une mesure Borelienne positive est une application

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

qui vérifie $\mu(\emptyset) = 0$ et de plus est additive sur les unions disjointes dénombrables.

2. Si de plus μ est finie sur les compacts alors on dit que μ est une mesure de Radon positive.

Les mesures de Radon ont un rôle particulier en analyse en vue du théorème de Riesz qui les identifie aux formes linéaires continues, ou encore aux distributions d'ordre zéro.

Théorème 1.1 (Riesz). Toute forme linéaire $L : C_c^0(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $L|_{C^0(K)}$ est continue pour tout $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, s'identifie à une mesure de Radon positive.

Passons maintenant aux mesures vectorielles. Il n'est pas tout à fait évident (mais pas impossible non plus) de développer une théorie de la mesure vectorielle analogue à celle des mesures scalaires, car l'additivité vectorielle est plus subtile.

En revanche, il est tout à fait facile de définir des mesures de **Radon vectorielle**, en s'inspirant du théorème de Riesz, et c'est exactement ce que nous allons faire. Précisément :

Definition 1.2 (Mesure de Radon vectorielle). Une mesure de Radon vectorielle est une forme linéaire $L : C_c^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $L|_{C^0(K)}$ est continue pour tout $K \subset \mathbb{R}^N$ compact. On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des mesures m -vectorielles sur \mathbb{R}^N .

Une mesure vectorielle μ n'est donc rien d'autre qu'une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$. On adopte la notation des distributions en notant $\langle \mu, \varphi \rangle$ l'action de μ sur φ .

Ensuite à partir de la mesure vectorielle $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ nous pouvons construire sa *variation totale* $|\mu|$ qui elle est bien une mesure de Radon positive au sens classique.

1.1 Variation totale

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$. Alors pour $A \subset \mathbb{R}^N$, ouvert, on note

$$|\mu|(A) := \sup \{ \langle \mu, \varphi \rangle \mid \varphi \in C_c^0(A, \mathbb{R}^m), |\varphi| \leq 1 \}.$$

Puis si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est un Borelien quelconque,

$$|\mu|(E) := \inf \{ |\mu|(A) \mid E \subset A, A \text{ ouvert} \}.$$

Proposition 1.1. *Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, alors $|\mu|$ est une mesure de Radon positive.*

1.2 Décomposition polaire

Le théorème de Riesz s'étend au cas vectoriel. C'est à dire que si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ (qui pour rappel est, par définition, une forme linéaire) alors il existe une fonction $|\mu|$ -mesurable

$$\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$$

telle que $\|\theta\| = 1$ $|\mu|$ -p.p. et qui vérifie

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi \cdot \theta)(x) d|\mu|(x).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mu = \theta |\mu|}.$$

La fonction θ est appelée partie **polaire** de μ .

La décomposition polaire est intéressante car elle décrit l'ensemble des mesures de Radon vectorielles comme étant tout simplement les mesures de Radon positives multipliées par une fonction à valeur dans \mathbb{R}^m , ce qui démystifie l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$.

1.3 Convergence faible

On dit que

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu$$

lorsque :

$$\text{pour tout } \varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N), \quad \langle \mu_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle.$$

Dans ce cas pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, ouvert, on a

$$|\mu|(A) \leq \liminf |\mu_n|(A).$$

1.4 Radon-Nicodym-Lebesgue-Besicovitch

Le but de cette section est d'énoncer un théorème de décomposition à la Radon-Nicodym pour une mesure vectorielle, contre une mesure scalaire.

On rappelle déjà la notion classique de mesure absolument continue ou singulière concernant deux mesures scalaires positives.

Definition 1.3. Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ sont des mesures (Boreliennes) positives alors

- $\nu \ll \mu$ lorsque : $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. On dit alors que ν est absolument continue par rapport à μ , ou bien ν est régulière par rapport à μ .
- μ et ν sont mutuellement singulières si il existe E tel que $\mu(\mathbb{R}^N \setminus E) = \nu(E) = 0$. On note alors $\mu \perp \nu$.

On peut étendre la définition dans le cas où l'une des mesures est vectorielle et l'autre est scalaire.

Definition 1.4. Si $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ et $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ alors on définit

- $\nu \ll \mu$ si $|\nu| \ll \mu$
- $\nu \perp \mu$ si $|\nu| \perp \mu$

Dans le cas général on peut toujours décomposer ν en une partie régulière plus partie singulière grâce au théorème suivant.

Théorème 1.2 (Differentiation Besicovitch-Lebesgue). Si $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ et $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N)$ est de Radon alors la limite

$$g(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \in \mathbb{R}^m$$

existe μ -presque partout. De plus $g \in L^1(\mathbb{R}^N, d\mu, \mathbb{R}^m)$ est Borel mesurable et

$$\nu = g\mu + \nu_\mu^s$$

avec $\nu_\mu^s \perp \mu$. On note alors

$$g = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Remarque : la décomposition est unique.

Cas particulier (exemple) : Si $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ et $\mu = |\nu|$. Alors la fonction g obtenue par dérivation de Besicovitch n'est rien d'autre que θ , la partie polaire de ν . On a donc pour $|\nu|$ -presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\theta(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{|\nu|(B(x, r))}.$$

2 Rectifiabilité

Le but de cette courte section est une introduction à la notion de rectifiabilité qui sera utile pour la structure des fonctions BV.

2.1 Mesures de Hausdorff

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble et $s \geq 0$. Pour $\delta > 0$ on considère tous les recouvrements possibles de E par une union dénombrable d'ensembles E_i vérifiant $\text{diam}(E_i) \leq \delta$ et l'on calcule l'inf de la somme des diamètres puissance s pour tous les recouvrements possibles soit

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) := \inf \left\{ c_N \sum_i \text{diam}(E_i)^s \mid E \subset \bigcup E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\},$$

où c_N est une constante dimensionnelle. Cette quantité étant clairement croissante dans la limite $\delta \rightarrow 0$ on peut ensuite définir

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

L'application $E \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ est une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ dont la tribu des mesurables (au sens de Carathéodory) contient tous les Boreliens. La restriction de \mathcal{H}^s à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ définit donc une mesure (qui n'est pas de Radon!).

Par exemple :

- pour $s = N - 1$: mesure de “surface”
- pour $s = 1$: mesure de “longueur”
- pour $s = 0$: mesure de comptage
- pour $s := N$: mesure de Lebesgue

Une utilité importante de la mesure \mathcal{H}^s est de pouvoir étendre à tout Borelien E quelconque la notion de mesure de surface, en calculant $\mathcal{H}^{N-1}(E)$. En particulier, dans le cadre des fonctions BV nous nous intéresserons surtout à la mesure \mathcal{H}^{N-1} sur \mathbb{R}^N .

2.2 Rectifiabilité

Soit $k \in \mathbb{N}$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est k -rectifiable si $\mathcal{H}^k(E \cap K) < +\infty$ pour tout $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, et si il existe une famille dénombrable d'applications Lipschitz

$$f_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$$

telle que

$$\mathcal{H}^k(E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbb{R}^k)) = 0.$$

Autrement dit, à mesure \mathcal{H}^k nulle près, E est contenu dans des images Lipschitz de \mathbb{R}^k . L'ensemble E est alors une “variété de dimension k ” au sens de la théorie de la mesure géométrique. En particulier, E admet un plan tangent approximatif \mathcal{H}^k -presque partout. C'est à dire que pour \mathcal{H}^k -presque tout $x \in E$ il existe un k -plan π_x tel que

$$\mathcal{H}^k|_{\frac{E-x}{r}} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{*} \mathcal{H}^k|_{\pi_x}.$$

Un résultat frappant stipule que la réciproque est également vraie, mais cela nous emmènerait trop loin.

3 Fonctions BV

Dans ce chapitre nous voyons la notion de fonction BV dans le but de comprendre l'énoncé du théorème Rang-1 d'Alberti.

3.1 Définition(s)

Commençons par la dimension 1. Soit $I =]a, b[$ et soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit la variation ponctuelle de u par

$$pV(u, I) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|, a < t_1, \dots, t_n < b \right\},$$

où le sup est pris sur toutes les subdivisions finies $\{t_i\}$ de l'intervalle $]a, b[$. On dit alors que u est à variation bornée, et l'on note $u \in BV(I)$, lorsque $pV(u, I) < +\infty$.

Ceci est la définition "historique" de fonction à variation bornée, mais n'est pas la version moderne que l'on généralise en dimension supérieure. Pour faire le lien avec la définition moderne, considérons une variation "essentielle" qui ne dépend pas du représentant p.p. de $u \in L^1_{loc}$ par

$$eV(u, I) := \inf \{pV(g, I) \mid g = u \mathcal{L}^1 - p.p.\}.$$

On a le résultat intéressant suivant.

Théorème 3.1. *Si $eV(u, I) < +\infty$ alors u' (au sens des distributions) est une mesure signée de Radon (i.e. $u' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) et*

$$eV(u, I) = |u'| (I)$$

(pour rappel, $|u'|$ est la variation totale de la mesure u').

Aujourd'hui c'est donc ainsi que l'on définit une fonction BV en toute dimension, par exemple avec la définition suivante :

Définition 3.1 (Fonction à variation bornée). *Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$. Alors on dit que $u \in BV(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ si Du (dérivée au sens des distributions) est une mesure de Radon vectorielle au sens de la Définition 1.2, i.e. $Du \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N \times m})$.*

3.2 Exemples

3.2.1 Exemples en dimension 1

1. Toute fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est dans BV . On peut même montrer en dimension 1 que toute fonction $BV(I)$ est la différence de deux fonctions croissantes.
2. Si $u \in W^{1,1}(I)$ alors $u \in BV(I)$ et $u' \ll \mathcal{L}^1$.

3. Fonction Saut : la fonction de Heaviside qui vaut 0 sur \mathbb{R}^- et 1 sur \mathbb{R}^+ est dans BV. Sa dérivée au sens des distribution est δ_0 , qui est une mesure de Radon, singulière par rapport à Lebesgue. Son support est le point $\{0\}$ qui est de dimension de Hausdorff $0 = N - 1$.
4. Fonction de Cantor-Vitali : “escalier du diable”. Il s’agit d’une fonction croissante continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ construite de manière itérative à partir de l’ensemble triadique de Cantor. Celle-ci est croissante donc BV et f' existe presque partout et vaut 0 presque partout. On peut en fait montrer que f' (au sens des distributions) est une mesure qui est singulière par rapport à \mathcal{L}^1 . Son support est l’ensemble de Cantor qui est de mesure de Lebesgue nul, mais de dimension de Hausdorff strictement positif (de dimension fractionnaire).

Nous verrons plus tard que les cas 2,3 et 4 décrivent toutes les fonctions BV possibles.

3.2.2 Exemple de saut en dimension N

Essayons de comprendre la mesure Du dans le cas d’un saut en dimension supérieure. Cet exemple est important dans la compréhension du théorème rang-1 d’Alberti.

Soit a, b deux vecteurs distincts de \mathbb{R}^m . On considère une fonction u qui prend les valeurs a et b de part et d’autre d’un hyperplan. Soit donc $T \subset \mathbb{R}^N$ l’hyperplan vectoriel orienté par un vecteur normal $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ et soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ telle que $u = a$ dans T^+ et $u = b$ dans T^- où

$$T^+ = \{x \mid \langle x, \nu \rangle > 0\} \quad \text{et} \quad T^- = \{x \mid \langle x, \nu \rangle < 0\}.$$

Pour i, j fixés calculons $\partial_j u_i$ au sens des distribution contre une fonction test φ en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \langle \partial_j u_i, \varphi \rangle &= -\langle u_i, \partial_j \varphi \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} u_i \partial_j \varphi \, dx \\ &= -\int_{T^+} a_i \partial_j \varphi \, dx - \int_{T^-} b_i \partial_j \varphi \, dx \\ &= \int_T a_i \nu_j \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} - \int_T b_i \nu_j \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

On en déduit que Du est la mesure supportée par l’hyperplan T , absolument continue par rapport à la mesure de surface \mathcal{H}^{N-1} et déterminée par

$$Du = (a - b) \otimes \nu \, \mathcal{H}^{N-1},$$

où par définition $(a - b) \otimes \nu$ est la matrice dont les coefficients sont

$$(a - b) \otimes \nu := ((a_i - b_i) \nu_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq N}$$

En particulier pour deux vecteurs quelconques $a \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^N$ la matrice $a \otimes c$ est toujours de **rang 1**. En effet $a \otimes c$ est la matrice $(a_i c_j)_{i,j}$ dont les colonnes sont toutes colinéaires au vecteur a .

La fonction u ainsi construite est donc dans $BV(\mathbb{R}^N)$ (car Du est une mesure) et Du est une mesure singulière par rapport à Lebesgue, qui est à valeur dans les matrices de rang 1.

Le théorème d'Alberti montre que ceci est un fait général pour les fonctions BV, mais avant de l'énoncer rappelons quelques éléments sur la structure des fonctions BV.

3.3 Structure de BV et théorème "rang-1"

Soit $u \in BV(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$. En particulier $u \in L^1_{loc}$ donc presque tout point est point de Lebesgue, c'est à dire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ il existe $z \in \mathbb{R}^m$ tel que u converge localement vers z en moyenne c'est à dire

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |u(y) - z| dy = 0.$$

On dit que z est une limite approximative de u , et on note $\tilde{u}(x) = z$. Soit $S_u \subset \mathbb{R}^N$ l'ensemble des points où u n'admet pas de limite approximative (c'est un Borelien). D'après Lebesgue, $\mathcal{L}^N(S_u) = 0$.

Ceci étant vrai pour toute fonction L^1_{loc} . Mais maintenant si $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, on a beaucoup mieux : l'ensemble S_u est en fait $N - 1$ -rectifiable. C'est donc une "variété" de dimension $N - 1$ au sens de la théorie de la mesure géométrique. En particulier, pour \mathcal{H}^{N-1} presque tout $x \in S_u$, il existe un plan tangent approximatif, et donc un vecteur normal $\nu_u(x)$. Enfin, cet ensemble caractérise l'ensemble des "sauts" de u , c'est à dire qu'il existe (pour \mathcal{H}^{N-1} presque tout $x \in S_u$) des vecteurs u^+ et u^- dans \mathbb{R}^m tels que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r^+|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u^+| dy = 0$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r^-|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u^-| dy = 0$$

où

$$B_r^+(x) := B(x, r) \cap \{y \mid \langle y, \nu_u(x) \rangle \geq 0\},$$

et

$$B_r^-(x) := B(x, r) \cap \{y \mid \langle y, \nu_u(x) \rangle \leq 0\}.$$

De plus la restriction de Du à S_u est absolument continue par rapport à \mathcal{H}^{N-1} , et on a

$$Du|_{S_u} = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u(x) \mathcal{H}^{N-1}.$$

Ceci caractérise la partie “saut” de u . On retrouve bien la forme de dérivée d’un saut comme calculé à l’exemple précédent.

En outre toute fonction u dans BV est approximativement différentiable presque partout. C’est à dire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ pour lequel la limite approximative $\tilde{u}(x)$ existe, il existe aussi une matrice $\xi \in \mathcal{M}_{m,N}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} \left| \frac{u(y) - \tilde{u}(x) - \xi \cdot (y - x)}{r} \right| dy = 0.$$

On note alors $\nabla u(x) := \xi$ qui est la partie absolument continue par rapport à Lebesgue c’est à dire que

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^N + D^s u,$$

et $D^s u$ se décompose lui même en une partie saut $(u^+ - u^-) \otimes \nu_u(x) \mathcal{H}^{N-1}$ plus un reste, que l’on note $D^c u$. Il s’agit de la partie “cantorielle”.

En conclusion pour $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ on a toujours la structure suivante de la mesure Du :

$$Du = \underbrace{\nabla u(x) \mathcal{L}^{N-1}}_{\text{Absolument continue \setminus à Lebesgue}} + \underbrace{(u^+ - u^-) \otimes \nu_u(x) \mathcal{H}^{N-1}|_{S_u}}_{\text{partie saut}} + \underbrace{D^c u}_{\text{partie cantorielle}}$$

Dans le cas des exemples précédents : pour la fonction de Heaviside, seule la partie “saut” existe. Pour la fonction de Cantor-Vitali, seule la partie “cantorielle” existe. Enfin pour une fonction $W^{1,1}$, seule la partie absolument continue existe. Dans le cas général on peut avoir un mélange des trois.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème dit “Rang-1” d’Alberti :

Théorème 3.2 (Rank-one - Alberti 1993). *Si $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ alors pour $D^s u$ -presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\frac{dD^s u}{d|D^s u|}(x)$ est une matrice de rang 1.*

Si l’on revient à la décomposition de Du décrite ci-dessus, la mesure $D^s u$ se décompose en une partie saut plus une partie cantorielle. Le théorème d’Alberti nous dit donc que non seulement la partie saut est de rang 1 (ça on le savait déjà), mais aussi la partie cantorielle, ce qui est beaucoup moins clair. De Giorgi et Ambrosio l’avait conjecturé en 1988 et Alberti a pu le démontrer 5 ans plus tard.

Ce théorème est aussi une conséquence du théorème de De Philippis et Rindler qui est apparu plus de 20 ans après le résultat d’Alberti. En effet, les matrices de rang-1 n’est autre que le “wave-cone” associé à l’opérateur *curl*. Etant donné que $u \in BV$ alors Du est une mesure qui est *curl-free*. D’après De Philippis et Rindler sa partie singulière doit prendre ses valeurs dans le wave cone associé à l’opérateur *curl*, d’où une nouvelle démonstration du théorème d’Alberti.

4 Théorème de De Philippis et Rindler

On note \mathcal{A} un opérateur d'ordre k à coefficients matrices sur $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. Autrement dit \mathcal{A} est de la forme

$$\mathcal{A}u = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \partial^\alpha u,$$

où A_α est une matrice de taille $n \times m$. Le théorème s'applique pour des opérateurs à coefficients variables mais nous nous restreignons ici au cas des opérateurs à coefficients constants. Le symbole principal de \mathcal{A} est

$$\mathbb{A}_k(\xi) = (2i\pi)^k \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Ce symbole admet un “wave cone” défini par

$$\Lambda_{\mathcal{A}} := \bigcup_{|\xi|=1} \ker(\mathbb{A}_k(\xi)).$$

Le wave cone est un objet qui a déjà été utilisé dans le passé, notamment par Murat-Tartar pour obtenir des résultats de compacité par compensation.

En particulier, le wave-cone contient les vecteurs le long desquelles des oscillations ou concentration 1D sont possibles pour des solutions de l'équation $\mathcal{A}u = 0$. On peut montrer que $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{A}}$ si et seulement si il existe un $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathcal{A}(\lambda h(x \cdot \xi)) = 0$$

pour toute fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}(\lambda \sin(nx \cdot \xi)) = 0 \quad (\text{oscillation})$$

et

$$\mathcal{A}(\lambda \sqrt{n} e^{-n(x \cdot \xi)^2}) = 0 \quad (\text{concentration}),$$

qui sont les deux phénomènes qui peuvent empêcher le passage à la convergence forte L^2 pour une suite de solutions qui convergerait faiblement.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux mesures vectorielles $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$\mathcal{A}(\mu) = 0,$$

au sens des distributions. D'après le théorème de différentiation de Besicovitch-Lebesgue (voir Théorème 1.2), cette mesure se décompose en une partie régulière par rapport à Lebesgue, plus une partie singulière :

$$\mu = \mu^a \mathcal{L}^N + \mu^s.$$

Le théorème de De Philippis et Rindler s'intéresse à la structure de μ^s . Notamment, μ^s admet une densité par rapport à sa variation totale $|\mu^s|$ (sa partie "polaire") autrement dit elle s'écrit de la façon suivante (voir le chapitre 1) :

$$\mu^s = \frac{d\mu^s}{d|\mu^s|} |\mu^s|.$$

Voici maintenant l'énoncé du théorème :

Théorème 4.1 (De Philippis et Rindler (2016)). *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ une mesure vectorielle vérifiant $\mathcal{A}(\mu) = 0$ (on dit que μ est \mathcal{A} -free). Soit μ^s sa partie singulière par rapport à Lebesgue. Alors $\frac{d\mu^s}{d|\mu^s|} \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, $|\mu^s|$ -p.p.*

Un exemple important est celui de l'opérateur $\mathcal{A} = \text{Curl}$, qui caractérise les gradients. Dans ce cas le wave-cone est constitué des matrices de rang-1, et l'on retrouve ainsi le théorème d'Alberti. Un autre exemple est celui de CurlCurl qui caractérise les gradients symétrisés. Curieusement, il n'y a vraiment d'autres exemples pertinents que ces deux là.

4.1 Démonstration du théorème

Pour la démonstration on se restreint à une opérateur d'ordre 1 de la forme

$$\mathcal{A}u = \sum_{j=1}^d A_j \partial^j u.$$

Le symbole de \mathcal{A} est

$$\mathbb{A}(\xi) = (2i\pi) \sum_{j=1}^d A_j \xi_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

de sorte qu'en passant à Fourier on trouve

$$\widehat{\mathcal{A}u}(\xi) = \mathbb{A}(\xi)\hat{u}.$$

Enfin, pour rappel, le wave cone est

$$\Lambda_{\mathcal{A}} := \bigcup_{|\xi|=1} \ker(\mathbb{A}(\xi)).$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \frac{d\mu}{d|\mu|}(x) \notin \Lambda_{\mathcal{A}} \right\}$$

et on suppose par l'absurde que $\mu^s(E) > 0$. On peut choisir un point $x_0 \in E$ et une suite $r_j \rightarrow 0$ qui vérifient les trois propriétés suivantes :

1. $\lambda_0 := \frac{d\mu}{d|\mu|}(x_0) \notin \Lambda_{\mathcal{A}}$

2. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\mu|^a(B_{r_j})}{|\mu^s|(B_{r_j})} = 0$ (car $|\mu^a|$ et $|\mu^s|$ sont mutuellement singulières)
3. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_{r_j}(x_0)|} \int_{B_{r_j}(x_0)} \left| \frac{d\mu}{d|\mu|}(x) - \lambda_0 |d|\mu|^s dx \right| |\mu|^s = 0$ (x_0 est point de Lebesgue pour $|\mu|^s$)

On s'intéresse ensuite à la suite de "blow-up" des mesures μ_j suivantes :

$$\mu_j := \frac{(T^{x_0, r_j})\#\mu}{|\mu|^s(B_{r_j}(x_0))}$$

où $f\#\mu$ désigne la mesure image de μ par f et ici T^{x_0, r_j} est définie par l'application de "remise à l'échelle"

$$T^{x_0, r_j}(x) := \frac{x - x_0}{r_j}.$$

Notez que l'on peut prendre μ ou μ^s cela n'a pas d'importance car x_0 est un point de densité pour μ^s .

Autrement dit μ_j est une sorte d'expansion homothétique de la mesure μ au point x_0 . Lorsque $r_j \rightarrow 0$, cette suite de mesures converge (à sous suite près, mais on note toujours r_j) vers une mesure limite qui est appelée une "mesure tangente" à μ^s au point x_0 . La convergence à lieu au sens de la convergence faible étoile.

L'existence d'une mesure tangente non triviale est donnée par la théorie des mesures tangentes et ne sera pas démontrée ici. Pour rappel, les mesures tangentes ont été introduites et étudiées par David Preiss. Il est l'un des outils principaux de son célèbre théorème de rectifiabilité, et fait partie maintenant des choses "bien connues" de la théorie de la mesure.

En réalité puisque λ_0 est la valeur de la densité de μ^s au points x_0 , qui est un point de Lebesgue, alors on a

$$\mu_j \rightarrow \lambda_0 \nu$$

où ν est une mesure tangente pour $|\mu^s|$. D'ailleurs on va également noter

$$\nu_j := \frac{(T^{x_0, r_j})\#|\mu|^s}{|\mu|^s(B_{r_j}(x_0))}.$$

NB : La différence entre μ_j et ν_j étant que μ_j est vectorielle tandis que ν_j est scalaire.

Heuristique : On peut désormais faire une preuve Heuristique qui ne fonctionne pas vraiment mais donne une idée de la direction dans laquelle aller pour la preuve :

Puisque \mathcal{A} est un opérateur linéaire et que $\mathcal{A}(\mu) = 0$ alors pour tout j on a encore

$$\mathcal{A}(\mu_j) = 0$$

au sens des distributions. Mais donc en passant à la limite on trouve

$$\mathcal{A}(\lambda_0 \nu) = 0.$$

Puis en passant par Fourier on trouve que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ on doit avoir

$$\mathbb{A}(\xi)(\lambda_0)\hat{\nu}(\xi) = 0. \quad (4.1)$$

Par ailleurs on sait que λ_0 n'est pas dans le wave-cone $\Lambda_{\mathcal{A}}$. Donc nécessairement (4.1) implique $\hat{\nu}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \neq 0$. Autrement dit le support de $\hat{\nu}$ est contenu dans $\{0\}$, et on en déduit donc que ν est absolument continue par rapport à Lebesgue (pour rappel, $\widehat{\delta}_0 = \mathcal{L}^d$).

On a donc une mesure μ^s singulière par rapport à Lebesgue, dont toutes les mesures tangentes sont absolument continues par rapport à Lebesgue, ce qui peut paraître abérrant et se rapproche de la contradiction recherchée. Mais curieusement, David Preiss a démontré que ce phénomène étrange pouvait bel et bien exister et donc ce n'est pas une vraie contradiction. Cependant, en améliorant la convergence des μ_j on peut aboutir à une vraie contradiction. C'est ce que nous allons faire dans la suite. *Fin de l'heuristique.*

Le but de la suite est donc de montrer que la convergence μ_j vers $\lambda_0\nu$ a lieu plus fortement que seulement faible-étoile. En effet on va montrer qu'elle a lieu en variation totale, i.e. $|\mu_j - \lambda_0\nu| \rightarrow 0$. Ceci sera suffisant pour conclure.

Plus précisément, nous allons démontrer les deux assertions suivantes :

$$0 \neq \nu|_{B_{1/2}} \ll \mathcal{L}^d \quad (4.2)$$

$$|\mu_j - \lambda_0\nu|(B_{1/2}) \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

Montrons que (4.2) et (4.3) permettent de conclure la démonstration : on sait que $\nu_j \perp \mathcal{L}^d$ donc il existe un ensemble E_j tel que. $\mathcal{L}^d(E_j) = 0$ et $\nu_j(B_{1/2}) = \nu_j(E_j)$.

Par suite,

$$\nu_j(B_{1/2}) = \nu_j(E_j) \leq |\nu_j - \nu|(B_{1/2}) + \underbrace{\nu(E_j)}_{=0 \text{ car } \nu \ll \mathcal{L}^d}$$

En prenant la liminf il s'en suit

$$0 = \nu(B_{1/2}) \leq \liminf \nu_j(B_{1/2}),$$

ce qui contredit (4.2). Ceci termine la preuve du théorème, dans le cas où (4.2) et (4.3) sont vrais.

En réalité on a déjà vu dans l'Heuristique comment obtenir grosso-modo (4.2). On va donc seulement démontrer (4.3), ce qui constitue le point central de la démonstration.

Pour ce faire on utilise une fonction de troncature positive $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vaut 1 sur $B_{1/2}$ et on considère la suite de mesures tronquées $\lambda_0\chi\nu_k$. (En fait il n'est pas sûr que ν_k soit une distribution tempérée donc comme on veut passer en Fourier il vaut mieux tronquer pour plus de sécurité).

D'après nos hypothèses faites sur x_0 (point de Lebesgue etc) on a

$$|\lambda_0 \chi \nu_k - \chi \mu_k|(\mathbb{R}^d) \leq |\lambda_0 \nu_k - \mu_k|(B_1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

donc on peut travailler avec $\lambda_0 \chi \nu_k$ en lieu et place de μ_k . Autrement dit on “gèle” le vecteur limite λ_0 et on se ramène à étudier les mesures scalaires ν_k ce qui simplifie un peu.

Appliquons maintenant l'opérateur \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda_0 \chi \nu_k) &= \sum_j A_j \partial_j (\lambda_0 \chi \nu_k) \\ &= \sum_j A_j \partial_j (\lambda_0 \chi \nu_k - \mu_k) \quad , \text{ car } \mathcal{A}(\mu_k) = 0 \\ &= \sum_j A_j \partial_j (\lambda_0 \chi \nu_k - \chi \mu_k) + \sum_j A_j \mu_j \partial_j \chi \end{aligned}$$

Maintenant dans toute la suite on va supposer que ν_k, μ_k, ν etc sont de braves fonctions $L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut s'y ramener par une régularisation par convolution (on passe les détails sur ce point technique).

Il s'agit maintenant de montrer la convergence **au sens** L^1 de notre suite de fonctions $\lambda_0 \chi \nu_k$ (ce qui équivaut à la convergence en variation totale pour les mesures). Pour cela nous allons utiliser des multiplicateurs de Fourier.

En effet en prenant Fourier on trouve

$$\mathbb{A}(\xi) \lambda_0 \widehat{\chi \nu_k}(\xi) = \mathbb{A}(\xi) \widehat{W_k}(\xi) + R_k(\xi)$$

avec

$$W_k = \lambda_0 \chi \nu_k - \chi \mu_k$$

et

$$R_k = \sum_{k=j}^d A_j \mu_k \partial_j \chi.$$

De plus on sait que $|W_k|(\mathbb{R}^d) \rightarrow 0$ et que

$$\sup_k |R_k|(\mathbb{R}^d) \leq C.$$

On multiplie maintenant par $\overline{\mathbb{A}(\xi) \lambda_0}$ et on additionne $\widehat{\chi \nu_k}$ pour trouver

$$\widehat{\chi \nu_k}(\xi) = \frac{\overline{\mathbb{A}(\xi) \lambda_0} \mathbb{A}(\xi) \widehat{W_k}(\xi)}{1 + |\mathbb{A}(\xi) \lambda_0|^2} + \frac{\overline{\mathbb{A}(\xi) \lambda_0} \widehat{R_k}(\xi)}{1 + |\mathbb{A}(\xi) \lambda_0|^2} + \frac{\widehat{\chi \nu_k}(\xi)}{1 + |\mathbb{A}(\xi) \lambda_0|^2}$$

En prenant maintenant Fourier inverse on peut écrire

$$\chi\nu_k = u_k + f_k + g_k$$

avec

$$\begin{aligned} u_k &= T_0(W_k) = \mathcal{F}^{-1}(m_0(\xi)\hat{W}_k(\xi)) \\ f_k &= T_1(R_k) = \mathcal{F}^{-1}(m_1(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{R}_k) \\ g_k &= T_2(\chi\nu_k) = \mathcal{F}^{-1}(m_2(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-1}\widehat{\chi\nu_k}), \end{aligned}$$

et les fonctions m_0 , m_1 et m_2 sont des multiplicateurs de Mihlin, c'est à dire vérifiant

$$|\partial^\beta m_i(\xi)| \leq K_\beta |\xi|^{-|\beta|}. \quad (4.4)$$

En effet, ici comme λ_0 n'est pas dans le wave-cone il est facile d'obtenir une inégalité du type

$$\mathbb{A}(\xi)(\lambda_0) \geq C|\xi|,$$

ce qui permet d'obtenir (4.4).

Rappelons que notre but est de montrer que les trois suites u_k , f_k et g_k sont des suites convergentes dans L^1 , à sous suite près. Ceci permettra de conclure la démonstration du théorème.

Or il est bien connu que pour un multiplicateurs de Mihlin l'opérateur associé $T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{u})$ est un opérateur borné de $L^p \rightarrow L^p$ pour $1 < p < +\infty$, et il envoie également L^1 dans $L^{1,\infty}$ (L^1 -faible) de façon continue.

Par ailleurs, il est aussi "bien connu" que, tout comme les injections Sobolev, l'injection

$$(Id - \Delta)^{\frac{-s}{2}} : L_c^1(B_1) \rightarrow L^q$$

pour $q > 1$, est compacte.

Autrement dit les suites f_k et g_k ne posent pas de problème : à partir d'une suite bornée dans L^1 (en locurence R_k ou $\chi\nu_k$), par injection compacte dans L^q avec $q > 1$ puis continuité sur L^q de l'opérateur de Mihlin, et le fait que l'on travaille sur le compact B_1 , on en déduit la convergence dans L^1 (à sous suite près).

Le problème principal se pose pour la suite u_k , qui d'après la théorie classique des opérateurs de Mihlin converge vers 0 seulement dans $L^{1,\infty}$ (car $W_k \rightarrow 0$ dans L^1). Or on voudrait une convergence forte dans L^1 (à sous suite près). C'est à dire que l'on a la propriété suivante :

$$\sup_{t>0} t\mathcal{L}^d(\{|u_k| > t\}) \leq C\|W_k\|_1 \rightarrow 0,$$

et on a aussi

$$u_k \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),$$

car

$$\begin{aligned}\langle u_k, \varphi \rangle &= \langle T_0(W_k), \varphi \rangle \\ &= \langle W_k, T_0^*(\varphi) \rangle \rightarrow 0.\end{aligned}$$

De ces informations on souhaiterait en tirer que $u_k \rightarrow 0$ dans L^1 . Bien sûr cela n'est pas toujours vrai en général mais dans le cas présent nous allons améliorer la convergence en utilisant une **très jolie astuce** basée entre autre par le fait que $\chi\nu_k \geq 0$.

Avant cela on rappelle le théorème de convergence dit "de Vitali".

Théorème 4.2 (Vitali). *Soit $\{f_n\}$ une suite de L^1 et f mesurable. Alors*

$$\{ f \in L^1 \text{ et } f_n \rightarrow f \text{ dans } L^1 \}$$

est équivalent à :

$$\{ f_n \rightarrow f \text{ en mesure et } f_n \text{ est equi-intégrable } \}.$$

Pour rappel :

- $f_n \rightarrow f$ en mesure veut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^d(\{|f_n - f| > \lambda\}) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.
- f_n est equi-intégrable veut dire que $\lim_{\mathcal{L}^d(E) \rightarrow 0} \sup_n \int_E f_n dx = 0$.

Une conséquence immédiate du théorème de Vitali, cruciale pour la suite, est la suivante. Ce qui est surprenant dans l'énoncé est le fait de contrôler uniquement la partie négative de la suite : ajouté au fait que la suite converge vers 0 au sens des distributions, cela suffit pour montrer la convergence totale de la suite.

NB : on note $f^- = \min(f, 0)$.

Proposition 4.1. *Soit f_n une suite de $L^1(B_1)$ telle que :*

1. $f_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(B_1)$
2. $f_n^- \rightarrow 0$ en mesure
3. $\{f_n^-\}$ est equi-intégrable

Alors $f_n \rightarrow 0$ dans $L^1_{loc}(B_1)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ une fonction positive. Il suffit de montrer que

$$\lim_n \int_{B_1} \varphi |f_n| dx = 0.$$

On écrit simplement

$$\int \varphi |f_n| dx = \int \varphi f_n + 2\varphi f_n^- \leq \int \varphi f_n + 2 \int f_n^- \rightarrow 0$$

ce qui démontre la proposition. □

Retour à la preuve du théorème : On était dans la situation où

$$\chi \nu_k = u_k + \underbrace{f_k + g_k}_{:=h_k} = u_k + h_k$$

avec h_k une suite qui est déjà pré-compacte dans L^1 . Maintenant on utilise l'inégalité :

$$0 \leq u_k + h_k$$

venant du fait que $\chi \nu_k \geq 0$ (pour rappel on faisait le blow-up d'une mesure positive). Ce fait important entraîne immédiatement que :

$$0 \leq u_k^- \leq h_k.$$

Or h_k étant pré-compacte dans L^1 , on en déduit que u_k^- est équi-intégrable (petit exercice facile...). On sait aussi que u_k^- converge vers 0 en mesure (grâce à la convergence dans $L^{1,\infty}$). D'après la proposition démontrée ci-dessus on en déduit comme souhaité que $u_k \rightarrow 0$ dans L^1 . **Ceci achève la démonstration du théorème.**

□

On retiendra comment la positivité de la suite ν_k a été exploitée de façon très astucieuse pour passer de la convergence $L^{1,\infty}$ à L^1 ...

Bonus : Solution de l'exercice : si $0 \leq u_k \leq h_k$ avec h_k pré-compact L^1 alors u_k est équi-intégrable. Par l'absurde, sinon il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un u_k et un ensemble E tel que $\int_E u_k > \varepsilon$ et $|E| \leq \delta$. Pour $\delta = 1/n$ on a $\int_{E_n} u_{k_n} > \varepsilon$ et $|E_n| \leq 1/n$. On extrait une sous-suite (que l'on indexe toujours par n) telle que $h_{k_n} \rightarrow h$. On aurait alors

$$\varepsilon < \int_{E_n} u_{k_n} \leq \int_{E_n} h_{k_n} \leq \int_{E_n} h + \int_{E_n} |h_{k_n} - h| \rightarrow 0$$

ce qui est absurde et termine l'exercice.