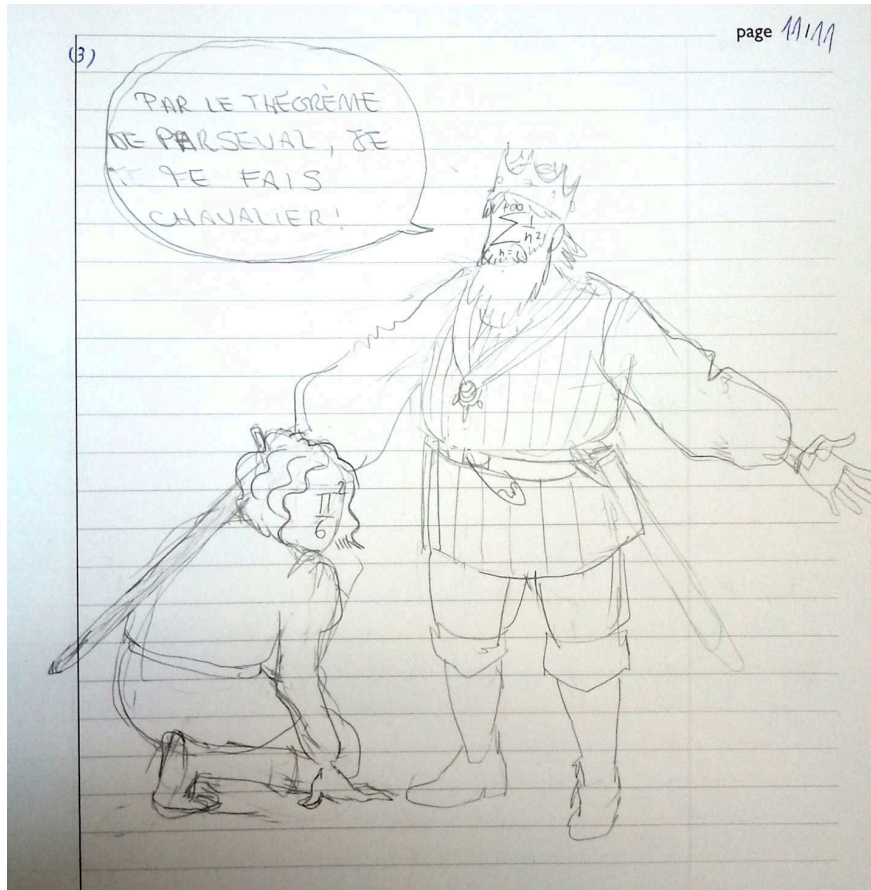


MP4: Algèbre et Analyse pour la physique,  
Semestre 4.

Antoine Lemenant

29 mars 2016



*Dessin réalisé en examen de MP4 par une étudiante en 2014.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>3</b>
1.1	Produits scalaires	3
1.2	Norme Euclidienne et orthogonalité	5
1.2.1	Norme euclidienne	5
1.2.2	Bases orthonormées	7
1.2.3	Orthogonalisation de Gram-Schmidt	7
1.2.4	Orthogonal d'un ensemble	8
1.3	Projections et symétries orthogonales	9
1.3.1	Projection orthogonale	9
1.3.2	Symétrie orthogonale	11
1.4	$O_n(\mathbb{R})$ , orientation de $\mathbb{R}^n$ et produit vectoriel	11
1.4.1	Matrices orthogonales	11
1.4.2	Orientations canoniques de $\mathbb{R}^n$	12
1.4.3	Produit vectoriel	13
1.5	Réduction des matrices symétriques de $\mathbb{R}^n$	15
1.6	Isométries en dimension 2 et 3	16
1.6.1	Dimension 2	16
1.6.2	Dimension 3	17
1.7	Tableau récapitulatif	19
<b>2</b>	<b>Compléments d'Analyse</b>	<b>20</b>
2.1	Suites et séries de fonctions	20
2.1.1	Suites de fonctions	20
2.1.2	Séries de fonctions	21
2.2	Fonctions de deux ou plusieurs variables	22
2.2.1	Topologie de $\mathbb{R}^n$	22
2.2.2	Continuité des fonctions à plusieurs variables	24
2.2.3	Dérivée de fonction à deux variables	25
2.2.4	Cas de plusieurs variables au départ et à l'arrivée	29
2.2.5	Dérivées composées	30
2.3	Intégrales à paramètre	31
2.3.1	Intégrale à paramètre sur un segment compact	31

2.3.2	Intégrale au sens généralisée à paramètre . . . . .	33
2.3.3	Convergence dominée pour une suite de fonctions . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>38</b>
3.1	Introduction et premières définitions . . . . .	38
3.2	Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier . . . . .	41
3.3	Inégalité de Bessel et premier théorème de convergence . . . . .	42
3.4	Lemme de Riemann-Lebesgue . . . . .	43
3.5	Deux énoncés de convergence . . . . .	44
3.5.1	Convergence ponctuelle . . . . .	44
3.5.2	Théorème de Féjer . . . . .	46
3.6	Convergence en norme et Théorème de Parseval . . . . .	48
3.6.1	Théorème de Parseval . . . . .	48
3.6.2	Preuve du Lemme 16 . . . . .	49
3.6.3	Exemple d'application de l'identité de Parseval . . . . .	49
3.6.4	Inégalité de Wirtinger . . . . .	50
3.7	Application à l'équation de la chaleur . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Intégrale double et triple</b>	<b>53</b>
4.1	Intégrale double . . . . .	53
4.1.1	Fonction intégrable . . . . .	53
4.1.2	Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	55
4.2	Intégrale triple . . . . .	59
4.3	Changement de variables . . . . .	60
4.3.1	Intégrale double en coordonnées polaires . . . . .	60
4.3.2	Intégrale triple en coordonnées cylindriques . . . . .	61
4.3.3	Intégrale triple en coordonnées sphériques . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Géométrie plane</b>	<b>64</b>
5.1	Courbes paramétrées . . . . .	64
5.1.1	Longueur d'une courbe paramétrée . . . . .	65
5.1.2	Paramétrisation normale . . . . .	66
5.1.3	Tangente, Courbure . . . . .	67
5.1.4	Formules de Frenet . . . . .	68
5.2	Formes différentielles de degré 1 . . . . .	69
5.2.1	Formes différentielles . . . . .	69
5.2.2	Formes exactes, formes fermées . . . . .	69
5.2.3	Intégrale curviligne . . . . .	71
5.2.4	Théorème de Green-Riemann . . . . .	73
5.3	Application : preuve de l'inégalité isopérimétrique par Fourier . . . . .	73

# Chapitre 1

## Espaces euclidiens

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront réels.

### 1.1 Produits scalaires

**Définition 1** (Forme bilinéaire). Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur  $E$  une application  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire par rapport à chacune des variables, c'est à dire

1.  $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z)$
2.  $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, b(x, y + \lambda z) = \lambda b(x, y) + b(x, z)$

**Représentation matricielle** : Soit  $\mathbf{b} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors l'application  $b(x, y) = {}^t X A Y$  où  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées des vecteurs  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathbf{b}$ , est une forme bilinéaire sur  $E$ . On l'appelle forme bilinéaire associée à  $A$  dans la base  $\mathbf{b}$ .

Inversement, soit  $b$  une forme bilinéaire sur  $E$ . On considère la matrice carrée  $B = (b_{ij})$  où, pour  $0 \leq i, j \leq n$ ,  $b_{ij}$  est défini par

$$b_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Alors  $b$  est la forme bilinéaire associée à  $B$  dans la base  $\mathbf{e}$ . On la note  $B = \text{Mat}(b, \mathbf{e})$

**Exemple** : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors la forme bilinéaire associée à  $A$  est dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est donnée par

$$b(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - 2x_2y_1 - 5x_1y_2 + 3x_2y_2.$$

**Remarque** : une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$  sera toujours une somme de termes bi-

linéaires élémentaires de la forme  $a_{ij}x_iy_j$ . Le coefficient  $a_{ij}$  devant le terme en  $x_iy_j$  se lit sur la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ième colonne de la matrice.

**Définition 2.** On dit qu'une forme bilinéaire sur  $E$  est symétrique si

$$\forall x, y \in E \quad b(x, y) = b(y, x).$$

**Remarque :** Une forme bilinéaire  $b$  est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base de  $E$  est une matrice symétrique, i.e.  ${}^tA = A$ .

**Remarque :** Pour montrer qu'une application donnée est bilinéaire et symétrique, il sera parfois plus commode de montrer d'abord qu'elle est symétrique car il suffit ensuite de démontrer la linéarité par rapport l'une des deux variables.

**Définition 3.** On dit qu'une forme bilinéaire sur  $E$  est positive si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) \geq 0$$

et on dit qu'elle est définie si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

**Définition 4** (Produit scalaire). Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

**Exemple 1 :** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

La forme bilinéaire associée dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$b(x, y) = (x_1, x_2, x_3)A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 13x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2)$$

Elle est symétrique car la matrice  $A$  l'est. Montrons qu'elle est définie positive. Pour cela il faut l'écrire sous forme de somme de carrés en absorbant les termes "produits croisés", par exemple de la façon suivante (ce procédé s'appelle communément la réduction de Gauss).

$$\begin{aligned} b(x, x) &= x_1^2 + 13x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 13x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1(2x_2 + x_3) - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 13x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 9x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

On voit tout de suite que  $b(x, x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ . De plus si  $b(x, x) = 0$  alors chaque terme est nul, donc  $x_3 = 0$ , puis  $2x_2 = x_3 = 0$  et enfin  $x_1 = 2x_2 + x_3 = 0$  donc finalement  $x = 0$ . La forme bilinéaire  $b$  est donc bien un produit scalaire.

**Exemple 2 :** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ . On considère  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$b(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Alors  $b$  est clairement bilinéaire, symétrique et positive. Le fait qu'elle soit définie provient du Lemme suivant.

**Lemme 1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Rightarrow f = 0$$

**Définition 5** (Espace euclidien). On appelle espace euclidien un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie muni d'un produit scalaire  $b$ . Dans ce cas on note, pour tout  $x, y \in E$ ,  $\langle x, y \rangle = b(x, y)$  et  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Exemples :**

- $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel (ou canonique)  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .
- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

## 1.2 Norme Euclidienne et orthogonalité

Soit  $E$  un espace euclidien fixé.

### 1.2.1 Norme euclidienne

**Proposition 1.** 1.  $\forall x, y \in E \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  (inégalité de Cauchy-Schwarz)

2. L'application  $x \mapsto \|x\|$  est une norme sur  $E$ , c'est à dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes

- (a)  $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (b)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (c)  $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Démonstration.* Fixons  $x, y \in E$  et soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|x + ty\|^2$ . Alors

$$P(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

Or pour tout  $t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$ . Donc si  $y \neq 0$ , le discriminant est négatif ce qui donne

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

d'où 1. (et si  $y = 0$  l'inégalité est claire). Si maintenant  $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\|$  alors le discriminant est nul, donc  $P$  admet une racine double. Si on nomme  $t_0$  cette racine, l'identité  $P(t_0) = 0$  donne immédiatement  $x + t_0y = 0$  et  $x$  et  $y$  sont liés. La réciproque est triviale.

2. (a)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  car le produit scalaire est définie positive.

(b) On élève au carré et on utilise l'homogénéité du produit scalaire.

(c) On a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$   
(Par Cauchy-Schwarz)

□

**Remarque :** Une application  $x \mapsto \|x\|$  qui vérifie les axiomes (a), (b) et (c) de la Proposition 1 sur un espace vectoriel  $E$ , est appelé une "norme". La norme permet de calculer la distance entre deux points par

$$dist(x, y) = \|x - y\|.$$

Par exemple sur  $E = \mathbb{R}^2$ , il existe des normes qui ne sont pas euclidiennes, telles que

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) \quad \text{ou} \quad \|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

C'est à dire qu'elles vérifient bien les axiomes d'une norme (a), (b) et (c), mais ne proviennent pas d'un produit scalaire (sauf pour  $p = 2$ ). On peut visualiser graphiquement l'allure de la boule unité associée à ces différentes normes, i.e. l'ensemble  $\{(x, y) : \|(x, y)\| \leq 1\}$ . Il est intéressant de voir que la norme "du maximum" donne une boule carrée! En règle générale, une norme qui provient d'un produit scalaire se voit au fait que sa boule unité est une ellipse.

**Définition 6.** Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux et on écrit  $x \perp y$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Exemple :** On a  $X^3 \perp 1$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ .

**Théorème 2** (Pythagore). Pour tout  $x, y \in E$ ,

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Démonstration.* Provient directement de l'identité  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ .

□



### 1.2.2 Bases orthonormées

**Définition 7.** Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. On dit que la famille  $\mathbf{v}$  est orthogonale si  $v_i \perp v_j$  pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ . Une base de  $E$  qui est aussi orthogonale est appelée base orthogonale.
2. On dit que la famille  $\mathbf{v}$  est orthonormée si c'est une famille orthogonale et si de plus  $\|v_i\| = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Si de plus  $\mathbf{v}$  est une base on dit que c'est une base orthonormée.

**Proposition 2.** Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille orthogonale de  $E$  formée de vecteurs non nuls. Alors  $\mathbf{v}$  est une famille libre.

*Démonstration.* Soit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ . Alors en prenant le produit scalaire avec  $v_{i_0}$  on obtient  $\lambda_{i_0} = 0$ . □

**Proposition 3.** Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ . Alors :

1.  $\forall i \leq n, x_i = \langle x, e_i \rangle$
2.  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$
3.  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

*Démonstration.* 1. Il suffit de prendre le produit scalaire et voir ce qui se passe.  
 2.  $\|x\|^2 = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_i x_i e_i \rangle$  et développer.  
 3. idem. □

### 1.2.3 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

**Théorème 3.** Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Alors

1. Il existe une unique base orthogonale  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  de  $E$  telle que  $w_1 = v_1$  et pour tout  $k \leq n - 1$ ,  $w_{k+1} - v_{k+1} \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_k\}$ .
2. Cette base vérifie  $\text{Vect}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$  pour tout  $k \leq n$ .

*Démonstration.* Pour chaque  $p \leq n$  on pose  $E_p = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ . On va faire une récurrence sur la dimension  $n$ . Pour  $n = 1$  le théorème est vrai en posant  $v_1 = w_1$ . On suppose maintenant que  $\dim(E) = n + 1$ . Supposons le théorème vrai pour un espace de dimension  $n$ , et soit  $(w_1, \dots, w_n)$  l'unique base orthogonale de  $F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$  vérifiant 1. On cherche un vecteur  $w_{n+1} \neq 0$  vérifiant  $w_{n+1} - v_{n+1} \in F$ , soit

$$w_{n+1} - v_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k.$$

Mais on souhaite également  $w_{n+1} \perp w_k$  pour tout  $k \leq n$ , donc en prenant la produit scalaire avec  $w_j$ , pour  $j \leq n$  on obtient

$$-\langle v_{n+1}, w_j \rangle = \langle w_{n+1} - v_{n+1}, w_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k, w_j \right\rangle = \lambda_j \|w_j\|^2,$$

d'où, comme  $\|w_j\| \neq 0$ ,

$$\lambda_j = \frac{-\langle v_{n+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2}.$$

On pose donc

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{\langle v_{n+1}, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k.$$

La famille  $(w_1, \dots, w_{n+1})$  vérifie bien les propriétés annoncées, et est unique par construction.  $\square$

**Remarque :**

1. L'unique base  $\mathbf{w}$  construite précédemment s'appelle l'orthogonalisée de  $\mathbf{v}$ .
2. On a vu au cours de la démonstration que  $\mathbf{w}$  est donnée par

$$w_1 = v_1 \quad \text{puis} \quad w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i.$$

La formule ci dessus est utilisée en pratique.

3. Si maintenant on pose  $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$  alors la famille  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  est orthonormée. On l'appelle l'orthonormalisée de  $\mathbf{v}$ .

**Corollaire 1.** *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

**Exemple :** Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ . Trouver l'orthonormalisée de la base de  $E$  formée des vecteurs  $(1, -1, 0)$  et  $(1, 0, -1)$ .

### 1.2.4 Orthogonal d'un ensemble

**Définition 8.** Soit  $A \subset E$ . On appelle orthogonal de  $A$  dans  $E$  noté  $A^\perp$ , l'ensemble

$$A^\perp = \{xy \in E : \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

**Proposition 4.** Soit  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ .

1.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
3.  $A \cap A^\perp = \{0\}$
4.  $A^\perp = [\text{Vect}(A)]^\perp$
5.  $\{0\}^\perp = E$

*Démonstration.* chaque assertion découle directement de la définition. □

**Exemple :** Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  le même espace que précédemment, muni du produit scalaire usuel. La condition  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  peut s'écrire  $\langle x, v \rangle = 0$ , où  $v = (1, 1, 1)$ . On en déduit que  $E = \{v\}^\perp$ .

## 1.3 Projections et symétries orthogonales

Soit  $E$  un espace euclidien fixé.

### 1.3.1 Projection orthogonale

**Proposition 5.** Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $y \in F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ . Cet unique vecteur s'appelle projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  et est noté  $P_F(x)$ . De plus si  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i \quad (1.1)$$

*Démonstration.* Unicité : si  $y, z \in F^\perp$  sont deux projetés orthogonaux, alors  $x - z$  et  $x - y$  sont tous deux dans  $F^\perp$ . Donc  $y - z \in F$  et  $y - z = y - x + x - z \in F^\perp$ , d'où  $y - z \in F \cap F^\perp = \{0\}$ .

Existence : puisque  $F$  est euclidien il admet une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_p)$ . On pose alors

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

et on vérifie facilement que ça marche. □

**Remarque :** Si on revient à la formule de Gram-Schmidt, elle peut s'écrire en terme projection orthogonale de la façon suivante

$$w_{k+1} = v_{k+1} - P_{F_k}(v_{k+1}),$$

où  $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ .

**Remarque :** D'après la formule (1.1) on voit que l'application  $P_F : E \rightarrow E$  est linéaire. On l'appelle projecteur orthogonal sur  $F$ .

**Remarque :** Pour tout  $x \in F$  il est clair que  $P_F(x) = x$ . En particulier, puisque  $P_F(x) \in F$ , on a  $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$  d'où

$$P_F \circ P_F = Id.$$

**Proposition 6.** Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors on a

1.  $E = F \oplus F^\perp$
2.  $F^{\perp\perp} = F$
3.  $P_F + P_{F^\perp} = Id$

*Démonstration.* 1. Comme  $F \cap F^\perp = \{0\}$  il reste à montrer que  $E \subset F \oplus F^\perp$ . Pour cela, il suffit d'écrire, pour tout  $x \in E$ ,  $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ .

2. On sait déjà que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . Montrons l'inclusion inverse. Soit  $x \in (F^\perp)^\perp$ . Alors  $P_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp$ . Donc,  $x - P_F(x) \in (F^\perp)^\perp$  (car  $(F^\perp)^\perp$  est un s.e.v. de  $E$ ). Mais aussi  $x - P_F(x) \in F^\perp$ . Donc  $x = P_F(x)$  et  $x \in F$ .

3. Soit  $x \in E$  et  $y = x - P_F(x)$ . Alors  $y \in F^\perp$  et  $y - x = (x - P_F(x)) - x \in F = (F^\perp)^\perp$ . On en déduit que  $y = P_{F^\perp}(x)$ . Ainsi  $P_F(x) + P_{F^\perp}(x) = x$ .  $\square$

**Remarque :** Si  $x \in F$  on a  $P_F(x) = x$  et si  $x \in F^\perp$  on a  $P_F(x) = 0$ . Donc si  $\mathbf{b} = (f_1, \dots, f_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(f_1, \dots, f_k)$  soit une base de  $F$  et  $(b_{k+1}, \dots, b_n)$  soit une base de  $F^\perp$ , la matrice de  $P_F$  dans la base  $\mathbf{b}$  est :

$$Mat(P_F, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} & F & F^\perp \\ Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 7.** Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

1.  $\forall x \in E, \|P_F(x)\| \leq \|x\|$
2.  $\|x - P_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| ; y \in F\}$

*Démonstration.* 1. On remarque que  $x - P_F(x)$  et  $P_F(x)$  sont orthogonaux et on applique Pythagore.

2. L'ensemble  $D = \{\|x - y\| ; y \in F\}$  est une partie non-vide (on prend  $y = 0$ ) et minorée par zéro. Elle admet donc une borne inférieure,  $\inf D$ . Clairement  $\|x - P_F(x)\| \geq \inf D$ . Inversement, on écrit

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2 \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x - P_F(x)\|.$$

Ainsi,  $\|x - P_F(x)\|$  minore  $D$ . D'où  $\|x - P_F(x)\| = \inf D$ .  $\square$

**Définition 9.** Si  $A \subset E$  est une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$  on note

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| ; y \in A\}$$

et on l'appelle distance de  $x$  à  $A$ .

**Remarque :** La proposition précédente montre que si  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  alors

$$d(x, F) = \|x - P_F(x)\|.$$

**Exemple :** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$  et  $w = (6, -4, 5)$ . Calculer  $d(w, F)$ .

### 1.3.2 Symétrie orthogonale

**Proposition 8.** Pour tout  $x \in E$  il existe un unique vecteur  $y \in E$  tel que  $x + y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ .

*Démonstration.* Le point  $y$  vérifie la relation si et seulement si  $z = \frac{1}{2}(y + x) \in F$  et  $z - x = \frac{1}{2}(y + x) - x = \frac{1}{2}(y - x) \in F^\perp$ . Donc  $z = P_F(x)$  et l'existence et l'unicité de  $y$  découle de celle de  $P_F$ .  $\square$

**Définition 10.** Cet unique vecteur est appelé le symétrique orthogonal de  $x$  par rapport à  $F$ . On le note  $S_F(x)$ .

**Remarque :** On vient de voir que pour tout  $x \in E$  on a  $S_F(x) = 2P_F(x) - x$ .

**Proposition 9.** L'application  $S_F : E \rightarrow E$  est linéaire. On l'appelle symétrie orthogonale par rapport à  $F$  (ou reflexion). Elle vérifie

1.  $S_F \circ S_F = Id$
2.  $\forall x \in E, \|S_F(x)\| = \|x\|$ .

*Démonstration.* 1. La linéarité provient de celle de  $P_F$ . De plus, la définition implique immédiatement que  $x = S_F(y) \Rightarrow y = S_F(x)$  d'où  $S_F \circ S_F = Id$ .  
2. On utilise que  $P_F(x) \perp P_F(x) - x$  pour écrire  $\|S_F(x)\|^2 = \|2P_F(x) - x\|^2 = \|P_F(x) + P_F(x) - x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 = \|P_F(x) + x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2$ .  $\square$

**Remarque :** Si  $x \in F$  on a  $S_F(x) = x$  et si  $x \in F^\perp$  on a  $P_F(x) = -x$ . Donc si  $\mathbf{b} = (f_1, \dots, f_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(f_1, \dots, f_k)$  soit une base de  $F$  et  $(b_{k+1}, \dots, b_n)$  soit une base de  $F^\perp$ , la matrice de  $S_F$  dans la base  $\mathbf{b}$  est :

$$Mat(S_F, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} F & F^\perp \\ Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix}$$

En particulier, si  $dim(E) = n$  et  $dim(F) = k$ , on a  $det(S_F) = (-1)^k$  et  $Tr(S_F) = 2k - n$ .

## 1.4 $O_n(\mathbb{R})$ , orientation de $\mathbb{R}^n$ et produit vectoriel

### 1.4.1 Matrices orthogonales

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 10.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  est inversible et  $M^{-1} = {}^tM$
2.  ${}^tMM = Id$
3.  $M{}^tM = Id$
4. Les colonnes de  $M$  forment une base orthonormée
5. Les lignes de  $M$  forment une base orthonormée

*Démonstration.* 1.  $\Rightarrow$  2. et 2.  $\Rightarrow$  3. sont clairs.

• (3  $\Rightarrow$  1)  $1 = \det(Id) = \det(M{}^tM) = \det(M)\det({}^tM) = \det(M)^2$  donc  $\det(M) \neq 0$  et  $M$  est inversible. En multipliant par  $M^{-1}$  on a l'identité voulue.

• (2  $\Leftrightarrow$  4) On note  $\delta_{ij}$  le symbole de Kroneker,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ . En particulier, une base  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  est orthonormée si et seulement si  $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Soit  $N = {}^tMM$  où  $N = (n_{ij})$ . Soit aussi  $C_j$  la  $j$ -ème colonne de  $M$ . On a  $C_j = (m_{kj})_{1 \leq k \leq n}$ . On note enfin  $({}^tm_{ij})$  les coefficients de  ${}^tM$ . Alors

$$\langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^n m_{ki}m_{kj} = \sum_{k=1}^n {}^tm_{ik}m_{kj} = n_{ij}.$$

Donc  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base orthonormée si et seulement si  $n_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow N = Id$ . 5. se démontre de manière analogue.  $\square$

**Définition 11.** *Une matrice  $M$  qui vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition précédente s'appelle une matrice orthogonale. On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Remarque :** Si  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$  et si  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{v}$  sont deux bases orthonormées de  $E$ , alors la matrice de passage de  $\mathbf{b}$  vers  $\mathbf{v}$  est une matrice orthonormée.

**Remarque :** Si  $M \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $\det(M) = \pm 1$ . De plus, on voit immédiatement que  $O_n(\mathbb{R})$  est un groupe, c'est à dire si  $A, B \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $AB \in O_n(\mathbb{R})$  et  $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ . On note généralement  $SO_n(\mathbb{R})$  le sous groupe

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

### 1.4.2 Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 12.** *Soit  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\mathbf{b}$  est orientée positivement (ou dans le sens direct) si*

$$\det(b_1, \cdot, b_n) = 1.$$

*Si au contraire le déterminant vaut  $-1$  on dit que la base est orientée négativement (ou dans le sens indirect).*

**Remarque :** Il revient au même de dire que  $\mathbf{b}$  est orientée dans le sens direct si la matrice de passage de la base canonique vers  $\mathbf{b}$  est dans  $SO_n(\mathbb{R})$ . En règle générale deux bases ont même orientation si la matrice de passage de l'une vers l'autre est dans  $SO_n(\mathbb{R})$ . C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées. En d'autres termes il n'existe que 2 type d'orientation possibles et nous avons choisi d'appeler "direct" le sens d'orientation de la base canonique.

### 1.4.3 Produit vectoriel

**Proposition 11.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur  $v \in E$  tel que

$$\forall x \in E \quad \langle v, x \rangle = \ell(x).$$

*Démonstration.* Existence. Soit  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . On pose

$$v = \sum_{i=1}^n \ell(e_i) e_i.$$

Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$\langle v, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \ell(e_i) e_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^n \ell(e_i) \langle e_i, x \rangle = \ell \left( \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i \right) = \ell(x).$$

Unicité. Si  $v'$  est un autre vecteur, alors sa coordonnée suivant  $e_i$  est  $\langle v', e_i \rangle = \ell(e_i)$  donc  $v' = v$ .  $\square$

Soit  $(u, v)$  une famille de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , muni du produit scalaire et du déterminant usuels. Alors l'application

$$x \mapsto \det(u, v, x)$$

est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$ . Il existe donc un unique vecteur  $w \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\forall x \in E \quad \langle w, x \rangle = \det(u, v, x).$$

**Définition 13.** Cet unique vecteur  $w$  est appelé produit vectoriel de  $u$  et  $v$ , et on le note  $u \wedge v$ . On dit aussi que  $\det(u, v, x)$  est le produit mixte de  $(u, v, w)$ .

Pour calculer  $u \wedge v$  en pratique dans  $\mathbb{R}^3$  muni de la base canonique  $\mathbf{e}(e_1, e_2, e_3)$  et du produit scalaire usuel, on pourra utiliser la formule suivante

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

que l'on obtient facilement en remarquant que les coordonnées de  $x \wedge y$  sur la base  $\mathbf{e}$  sont justement données par  $\langle u \wedge v, e_i \rangle$ .

Voici quelques propriétés utiles du produit vectoriel.

**Proposition 12.** Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ . On a

1.  $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$  et  $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$
3.  $x \wedge x = 0$
4.  $y \wedge x = -x \wedge y$
5.  $x \wedge y \perp x$  et  $x \wedge y \perp y$
6.  $x \wedge y = 0$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires

*Démonstration.*

1. Pour tout  $v \in E$  on a  $\langle (x + y) \wedge z, v \rangle = \det(x + y, z, v) = \det(x, z, v) + \det(y, z, v) = \langle x \wedge z, v \rangle + \langle y \wedge z, v \rangle = \langle x \wedge z + y \wedge z, v \rangle$ . Même chose pour l'autre identité.
2. Pour tout  $v \in E$ ,  $\langle (\lambda x) \wedge y, v \rangle = \det(\lambda x, y, v) = \lambda \det(x, y, v) = \lambda \langle x \wedge y, v \rangle$ . Idem pour l'autre identité.
3. Pour tout  $v \in E$  on a  $\langle x \wedge x, v \rangle = \det(x, x, v) = 0$ . D'où  $x \wedge x = 0$ .
4. Pour tout  $v \in E$ ,  $\langle y \wedge x, v \rangle = \det(y, x, v) = -\det(x, y, v) = \langle -x \wedge y, v \rangle$ .
5.  $\langle x \wedge y, x \rangle = \det(x, y, x) = 0$ . Idem pour l'autre.
6. Si  $y = \lambda x$  alors  $x \wedge y = \lambda x \wedge x = 0$ . Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont libres on peut compléter  $(x, y)$  avec  $z$  pour former une base  $(x, y, z)$ . Dans ce cas,  $\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z) \neq 0$  ce qui implique  $x \wedge y \neq 0$ .

□

**Proposition 13.** Soit  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . On a  $\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$

La preuve de la proposition nécessite le Lemme suivant.

**Lemme 4.** Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  écrits dans la base canonique, et soit  $M$  la matrice formée des produits scalaires mutuels des  $v_i$  (pour le produit scalaire usuel), c'est à dire

$$M = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}.$$

Alors  $\det(\mathbf{v})^2 = \det(M)$  (où  $\det$  est le déterminant usuel).

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que, si on considère  $\mathbf{v}$  comme la matrice contenant les vecteurs  $v_i$  écrits dans la base canonique sur chaque colonne, alors

$$M = {}^t \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

d'où,  $\det(M) = \det({}^t \mathbf{v}) \det(\mathbf{v}) = \det(\mathbf{v})^2$ .

□

*Démonstration de la proposition 13.* On écrit  $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$  et donc, puisque  $x \wedge y \perp y$ , et  $x \wedge y \perp x$ ,

$$\|x \wedge y\|^4 = \det(x, y, x \wedge y)^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle & \langle x \wedge y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle & \langle x \wedge y, y \rangle \\ \langle x, x \wedge y \rangle & \langle y, x \wedge y \rangle & \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle & 0 \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \end{vmatrix} = \|x \wedge y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2).$$

1. Si  $\|x \wedge y\| = 0$  alors  $x \wedge y = 0$  donc  $x$  et  $y$  sont liés et  $\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = 0$  et la formule voulue est vérifiée (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).
2. Si  $\|x \wedge y\| \neq 0$  on conclut en divisant par  $\|x \wedge y\|^2$ .

□

**Corollaire 2.** *Si  $(u, v)$  est une famille orthonormée alors  $(u, v, u \wedge v)$  est une base orthonormée directe.*

*Démonstration.* Comme  $\langle x, y \rangle = 0$  on a  $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| = 1$ . De plus  $x \wedge y \perp x$  et  $x \wedge y \perp y$ . Enfin,  $\det(x, y, x \wedge y) = \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle = \|x \wedge y\|^2 = 1$ , donc l'orientation est directe. □

## 1.5 Réduction des matrices symétriques de $\mathbb{R}^n$

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.** *Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique, alors elle se diagonalise dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^t P M P$  soit une matrice diagonale.*

*Démonstration.* On montre d'abord que le polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une racine de  $P(\lambda)$ . Alors il existe un vecteur colonne  $X$  à coefficients complexes tel que  $MX = \lambda X$ . Alors :

$$\lambda {}^t X \bar{X} = {}^t (\lambda X) \bar{X} = {}^t X {}^t M \bar{X} = {}^t X M \bar{X} = {}^t X \bar{M} \bar{X} = {}^t X \overline{M X} = {}^t X \overline{\lambda X} = \bar{\lambda} {}^t X \bar{X}$$

et  ${}^t X \bar{X} = \sum_i |x_i|^2 \neq 0$  donc  $\lambda = \bar{\lambda}$ , autrement dit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On sait donc, d'après le cours de MP3, que  $M$  se trigonalise dans une certaine base, que l'on note  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Cela revient à dire que pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $u(v_k) \in \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} =: F_k$ .

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de  $\mathbf{v}$ . Alors  $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\} = F_k$  donc la matrice  $M$  écrite dans la base  $\mathbf{u}$  est encore triangulaire supérieure. Notons  $A$  cette matrice. Puisque la base canonique et la base  $\mathbf{u}$  sont toute les deux orthonormées, la patrice de passage  $P$  est une matrice orthogonale. En d'autre termes on a

$$A = {}^t P M P.$$

En prenant la transposée on obtient

$${}^t A = {}^t ({}^t P M P) = {}^t P {}^t M {}^t P = {}^t P M P = A$$

donc  $A$  est elle même symétrique. Etant symétrique et triangulaire, cette matrice ne peut être que diagonale. □

**Remarque :** Si  $M$  est une matrice symétrique et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Mx, y \rangle = \langle x, My \rangle$$

**Endomorphisme symétrique :** Si  $E$  est un espace euclidien et  $u : E \rightarrow E$  est un endomorphisme, on dit que  $u$  est symétrique si

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

On peut montrer que  $u$  est symétrique, si et seulement si la matrice de  $u$  dans une base orthonormée est une matrice symétrique. Par exemple les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphisme symétriques.

## 1.6 Isométries en dimension 2 et 3

**Définition 14.** Soit  $E$  un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme  $u : E \rightarrow E$  est une isométrie si

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

**Proposition 14.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $u$  est une isométrie
2.  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
3.  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée

**Remarque :** La dernière propriété indique que la matrice de  $u$  dans la base  $\mathbf{e}$  est une matrice orthogonale. En particulier  $\det(u) = 1$  ou  $-1$ .

Le but de ce chapitre est de classer toutes les isométries possibles de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  munis de leur produit scalaire canonique.

### 1.6.1 Dimension 2

**Théorème 6.** Soit  $M \in O_2(\mathbb{R})$  alors

1. si  $\det(M) = 1$  alors  $M$  représente une matrice de rotation.
2. si  $\det(M) = -1$  alors  $M$  représente une symétrie par rapport à une droite.

*Démonstration.* Supposons que  $M \in O_2(\mathbb{R})$  et notons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Premier cas :**  $\det(M) = 1$ . Alors en écrivant  ${}^tM = M^{-1}$  on obtient

$${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = M^{-1}.$$

donc  $a = d$  et  $c = -b$  et  $M$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\det(M) = 1$  on en déduit que  $a^2 + c^2 = 1$ . Il existe alors un unique réel  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $\cos(\theta) = a$  et  $\sin(\theta) = c$ . On obtient finalement que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} := R(\theta).$$

C'est la matrice de rotation d'angle  $\theta$  : plus précisément si  $u \in \mathbb{R}^2$ , alors  $Mu$  est le vecteur de même norme tourné d'un angle  $\theta$  dans le sens direct.

Deuxième cas :  $\det(M) = -1$ . Dans ce cas, l'identité  ${}^tM = M^{-1}$  devient

$${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = M^{-1}.$$

La matrice  $M$  est donc de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

De plus  $a^2 + b^2 = 1$ . Puisque  $M$  est symétrique, elle se diagonalise dans une base orthonormée. Soient  $u_1$  et  $u_2$  cette base orthonormée formée de vecteurs propres, associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (réels). Puisque  $M$  est une isométrie, on en déduit que  $1 = \|u_i\| = \|Mu_i\| = |\lambda_i| \|u_i\| = |\lambda_i|$  donc  $\lambda_i \in \{1, -1\}$ , et puisque le produit  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(M) = -1$  on sait que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes opposés. Supposons que  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$ . Alors  $M$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par  $u_1$ .  $\square$

## Fin du cours numéro 4 (9 Février) – Par Vincent

### 1.6.2 Dimension 3

**Théorème 7.** Soit  $M \in O_3(\mathbb{R})$  alors

1. si  $\det(M) = 1$  alors  $M$  représente une rotation autour d'un axe.
2. si  $\det(M) = -1$  alors  $M$  représente une symétrie par rapport à un plan ou bien la composée d'une telle symétrie avec une rotation autour d'un axe.

*Démonstration.* Puisque le polynôme caractéristique est de degré 3, il admet au moins une racine réelle. On note cette valeur propre réelle  $\lambda_1$ . Puisque  $M$  est une isométrie, on a forcément  $|\lambda_1| = 1$ , d'où  $\lambda_1 = 1$  ou bien  $\lambda_1 = -1$ . Soit  $u_1$  un vecteur propre associé, et soit  $F = \{u_1\}^\perp$ . On note  $v$  l'application linéaire associée à la matrice  $M$ . Montrons que  $v(F) \subset F$ . Pour cela, on considère  $z \in F$  et on remarque que, puisque  $v$  est une isométrie et que  $v(e_1) = e_1$ ,

$$\langle v(z), e_1 \rangle = \langle v(z), v(e_1) \rangle = \langle z, e_1 \rangle = 0,$$

d'où  $v(z) \in \{e_1\}^\perp = F$ . En d'autres termes  $F$  est stable par  $v$ . De plus la restriction de  $v$  au sous espace  $F$  est une isométrie de dimension 2. On est donc réduit à l'étude précédente. Soit  $(u_2, u_3)$  est une base orthonormée de  $F$  telle que  $(u_1, u_2, u_3)$  soit orientée dans le sens direct, et soit  $P$  est la matrice de passage de la base canonique vers  $(u_1, u_2, u_3)$ . Les différents cas possibles sont les suivants :

Premier cas :  $\lambda_1 = 1$  et  $v|_F$  est une rotation. Il existe donc un unique  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit alors que  $M$  est la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe orienté  $u_1$ .

**Remarque** : le fait d'avoir orienté la base  $(u_1, u_2, u_3)$  en sens direct est très important pour déterminer de façon non ambiguë l'angle de la rotation.

Deuxième cas :  $\lambda_1 = 1$  et  $v|_F$  est une symétrie par rapport à une droite. On peut supposer sans perte de généralité que  $Mu_2 = u_2$  et  $Mu_3 = -u_3$  et dans ce cas

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $M$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $Vect(u_3)$ .

Troisième cas :  $\lambda_1 = -1$  et  $v|_F$  est une rotation. Il existe donc un unique  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas,  $v$  est la composée d'une rotation autour de l'axe  $u_1$  d'angle  $\theta$  avec une symétrie orthogonale par rapport à  $u_1$ .

Quatrième cas :  $\lambda_1 = -1$  et  $v|_F$  est une symétrie par rapport à une droite. On peut supposer sans perte de généralité que  $Mu_2 = -u_2$  et  $Mu_3 = u_3$  et dans ce cas

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $M$  est la symétrie orthogonale par rapport au plan  $Vect(u_1, u_2)$ . Mais alors  $v$  n'est autre que la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe orienté  $u_3$ .  $\square$

**Remarque** : pour trouver l'angle d'une rotation autour d'un axe dans  $\mathbb{R}^3$ , on pourra utiliser la trace de la matrice qui vaut  $1 + 2\cos(\theta)$ . Ceci détermine le cosinus de l'angle, c'est à dire l'angle à  $\pm\pi/2$  près. Ensuite, pour déterminer  $\theta$  de façon exacte, il suffit de connaître le signe de  $\sin(\theta)$ . Si  $u_1$  est un vecteur directeur de l'axe

(de norme 1) et  $u_2 \in \{u_1\}^\perp$  (de norme 1), la base  $(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2)$  est orthonormée et directe. On a alors

$$\sin(\theta) = \langle v(u_2), u_1 \wedge u_2 \rangle = \langle u_1 \wedge u_2, v(u_2) \rangle = \det(u_1, u_2, v(u_2)).$$

Mais seul le signe du sinus nous intéresse, et dans ce cas, si  $(u_1, u_2)$  n'est pas forcément de norme 1, le sinus sera toujours du même signe que le déterminant précédent, c'est à dire

$$\text{sign}(\sin(\theta)) = \text{sign}(\det(u_1, u_2, v(u_2))).$$

## 1.7 Tableau récapitulatif

	Symétrique	Inversible	Diagonalisable	Isométrie
Projection	oui	non	oui	non
Symétrie	oui	oui	oui	oui
Rotation	non	oui	non	oui

## Chapitre 2

# Compléments d'Analyse

### 2.1 Suites et séries de fonctions

#### 2.1.1 Suites de fonctions

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Une suite de fonctions sur  $I$  est une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est une fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Il existe deux notions principales de convergence pour les suites de fonctions.

**Définition 15** (Convergence simple). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une autre fonction. On dit que  $f_n$  converge vers  $f$  simplement sur  $I$ , si pour tout  $x \in I$  fixé, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ .

**Exemple 1.** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $I = [0, 1]$  définie par  $f_n(x) = x^n$  converge simplement vers la fonction (discontinue) qui nulle partout sauf en 1, où elle vaut 1.

**Remarque** : L'exemple précédent est instructif pour les raisons suivantes :

- 1) on remarque que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue
- 2) on remarque que l'interversion de limites suivante n'est pas vraie, autrement dit on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

En effet, la convergence simple est trop "faible" pour avoir ce type de propriétés. Pour cela, il faut une notion plus forte de convergence, la convergence uniforme.

- 3) La suite de fonctions  $f_n(x) = nx^n$  converge simplement vers 0 sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ , et pourtant  $\int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1}$  converge vers 1 donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

**Définition 16** (Convergence uniforme). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une autre fonction. On dit que  $f_n$  converge vers  $f$  uniformément sur  $I$ , si on a

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Voici les propriétés importantes à connaître sur la convergence d'une suite de fonctions.

**Proposition 15.** 1. Si  $f_n \rightarrow f$  uniformément, alors  $f_n \rightarrow f$  simplement.

2. Si  $f_n$  est continue pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n \rightarrow f$  uniformément, alors  $f$  est continue.

3. Si  $I$  est borné et si  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $I$  alors

$$\int_I f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx.$$

### 2.1.2 Séries de fonctions

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on peut considérer la série de fonctions  $\sum_k f_k$  et étudier sa convergence. Pour ce faire, on pose pour  $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x). \quad (2.1)$$

La suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors une suite de fonctions et

**Définition 17.** On dit que la série de fonctions  $\sum_k f_k$  converge simplement si la suite de fonctions  $F_n$  définie en (2.1) converge simplement, et on dit que la série de fonctions  $\sum_k f_k$  converge uniformément si la suite de fonctions  $F_n$  converge uniformément.

Si la série de fonctions converge, on note  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  sa limite. Si les  $f_k$  sont continues et si la convergence est uniforme, alors la limite est une fonction continue c'est à dire que la fonction

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

est une fonction continue sur  $I$ .

En général la convergence uniforme se démontre en utilisant le critère suivante de convergence normale.

**Définition 18** (Convergence normale). Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $\sum_k f_k$  converge normalement sur  $I$  si la série numérique  $\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_k(x)|$  est une série convergente.

en effet, on a

**Proposition 16.**

*convergence normale  $\Rightarrow$  convergence uniforme  $\Rightarrow$  convergence simple*

et aussi

**Proposition 17** (Dérivabilité des séries de fonctions). *Si  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions  $C^1$  sur  $I \subset \mathbb{R}$  et si  $\sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$  converge normalement sur  $I$ , alors la fonction*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

*est une fonction  $C^1$  sur  $I$  et*

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$$

**Exemple 2.** *La série de fonctions  $\sum_k \frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , car pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  fixé la série est absolument convergente. La convergence est en réalité normale sur  $\mathbb{R}$  car  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)| \leq \frac{1}{1+k^3}$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k^3}$  converge. Puisque la convergence normale entraîne la convergence uniforme et que les fonctions  $\frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)$  sont continues, on en déduit que la fonction*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)$$

*est une fonction continue.*

*De plus, les fonctions  $f_k(x) = \frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)$  sont  $C^1$  et*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_k(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{2\pi k}{1+k^3} |\cos(2\pi kx)| \leq \frac{2\pi k}{1+k^3}.$$

*Or  $\sum_k \frac{2\pi k}{1+k^3}$  converge, donc la série des dérivées  $\sum_k f'_k(x)$  est une série de fonctions normalement convergente. On en déduit que la fonction  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx)$  est  $C^1$  et*

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k^3} \sin(2\pi kx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\pi k}{1+k^3} \cos(2\pi kx)$$

## 2.2 Fonctions de deux ou plusieurs variables

### 2.2.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$

On muni  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne vue précédemment

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Il existe d'autres normes (non euclidiennes) sur  $\mathbb{R}^n$ , par exemple la norme-1

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$



ou la norme du MAX (ou norme infinie)

$$\|x\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  ne sont pas égales, mais sont équivalentes c'est à dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty \leq C\|x\| \leq C\|x\|_1.$$

**Boule** : La boule de centre  $x \in \mathbb{R}^n$  est de rayon  $r > 0$  est définie par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n ; \|y - x\| \leq r\}$$

**Partie Bornée** : Une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est bornée s'il existe une boule telle que  $A \subset B(x, r)$ .

**Partie Ouverte** : Une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est ouverte si, pour tout  $x \in A$  il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .

**Partie Fermée** : Une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est fermée si  $\mathbb{R}^n \setminus A$  est ouvert.

**Exemple** :

- $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 > 0\}$  est ouvert et non borné.
- l'ensemble  $[0, 1] \times [0, 2]$  est fermé borné
- l'ensemble  $[0, 1] \times ]0, 2[$  n'est ni ouvert, ni fermé.

**Limite d'une suite** : Si  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  est une suite de points de  $\mathbb{R}^n$ , un point  $a \in \mathbb{R}^n$  est appelé limite de la suite  $x^{(k)}$  quand  $k \rightarrow +\infty$  si

$$\|x^{(k)} - a\| \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0.$$

On dit alors que la suite  $(x^{(k)})$  converge vers  $a$  et on note

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = a \quad \text{ou bien} \quad x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a.$$

Parfois on notera simplement  $x^{(k)} \rightarrow a$  lorsqu'il n'y aura aucune confusion possible.

**Remarque** :  $x^{(k)} \rightarrow a$  si et seulement si chacune de ses coordonnées converge dans  $\mathbb{R}$  vers la coordonnée de  $a$  correspondante.

**Remarque** : Les notions de suites convergente, ouvert, fermé, borné, ne dépendent pas du choix de la norme (attention ceci est vrai uniquement en dimension finie).

**Sous-suite** : si  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  est une suite de  $\mathbb{R}^n$ , alors une suite extraite (ou sous-suite) est une suite de la forme  $(x^{(\varphi(k))})_{k \geq 0}$  avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante.

**Théorème de Bolzano-Weierstrass** : De toute suite bornée de  $\mathbb{R}^n$  on peut extraire une sous-suite convergente.

**Caractérisation d'un fermé** : un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est fermé si et seulement si toute suite convergente  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  de points de  $A$ , converge vers un point de  $A$ .

## 2.2.2 Continuité des fonctions à plusieurs variables

**Définition 19.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est continue au point  $a \in A$  si, pour toute suite  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  de points de  $A$  telle que  $x^{(k)} \rightarrow a$  on a  $f(x^{(k)}) \rightarrow f(a)$ . On dit que  $f$  est continue sur  $A$  si elle est continue en tout point de  $A$ .

**Exemple :**

- $x \mapsto \|x\|$  est continue
- $x \mapsto x_1 x_2$  est continue
- Toute forme linéaire sur  $\mathbb{R}^2$ , i.e. de la forme  $x \mapsto ax_1 + bx_2$  est continue

**Algèbre des fonctions continues** : si  $f$  et  $g$  sont continues alors  $f+g$  et  $fg$  sont continues. Si  $f$  est continue et jamais nulle alors  $1/f$  est continue. Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors  $g \circ f$  est continue.

**Attention** : Si  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors les fonctions partielles  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  et  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  sont continues mais la réciproque est fautive. Par exemple l'application

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

n'est pas continue au point  $(0, 0)$  (considérer par exemple la suite  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ) or les applications partielles  $f(\cdot, 0)$  et  $f(0, \cdot)$  sont identiquement nulles, donc continues.

**Définition 20** (Limite en un point). On dit que  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admet la limite  $\ell$  au point  $a \in \mathbb{R}^n$  si, pour toute suite  $(x^{(k)})_{k \geq 0}$  pour tout  $k$ , on a  $f(x^{(k)}) \rightarrow \ell$ . On peut alors prolonger par continuité la fonction  $f : A \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $f(a) = \ell$ .

**Proposition 18.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est fermé et borné, et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $A$ , alors  $f(A)$  est bornée et il existe  $a \in A, b \in A$  tels que

$$f(a) = \inf_A f \quad \text{et} \quad f(b) = \sup_A f.$$

En d'autres termes  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

*Démonstration.* considérer une suite minimisante, appliquer Bolzano-Weierstrass, utiliser la continuité de  $f$ . □

**Remarque** : le schéma de preuve de la proposition précédente se généralise en dimension infini pour montrer l'existence de minimum pour des fonctionnelles semi-continues inférieurement. On appelle ce principe "méthode directe du calcul des variations". Il sert notamment pour des systèmes physiques dont on veut minimiser l'énergie.

**Cas des fonctions vectorielles** : Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , alors  $f$  peut s'écrire sous la forme  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ . On dit alors que  $f$  est continue si chaque  $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

### 2.2.3 Dérivée de fonction à deux variables

Dans tout ce paragraphe  $U \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

#### Dérivée selon une direction :

Soit  $a \in U$  et  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  un vecteur. Il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(a, \delta) \subset U$ . On considère, pour  $t \in ]-\delta, \delta[$ , la fonction  $\varphi_h(t) = f(a + th)$ . Si  $\varphi_h$  est dérivable en 0 on dit que  $f$  est dérivable dans la direction  $h$  et on pose

$$Df_a(h) = \varphi'_h(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}.$$

#### Dérivée partielle :

Les dérivées suivant les directions  $e_1$  et  $e_2$  (base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ) sont appelées dérivées partielles notées

$$D_a f(e_1) = \partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \text{et} \quad D_a f(e_2) = \partial_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

**Définition 21.** On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et on note  $f \in C^1(U)$  si

$$a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \text{et} \quad a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

sont des fonctions continues sur  $U$ .

**Notation** : Si  $f$  admet des dérivées partielles au point  $a$  on note  $\nabla f(a)$  le vecteur gradient au point  $a$ ,

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)$$

et on note  $df(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire tangente définie par

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

**Remarque** : si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  alors  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue au sens décrit plus haut.

**Exemple** : Soit  $f(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2)$ . Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \sin(a_2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = a_1 \cos(a_2).$$

On a donc  $\nabla f(a) = (\sin(a_2), a_1 \cos(a_2))$ .

**Théorème 8** (Developpement limité du premier ordre). Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et soit  $a \in U$ . Alors

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

*Démonstration.* On écrit

$$\begin{aligned}
 & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\
 = & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) \\
 = & \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1, a_2)h_2 + o(h_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 + o(h_1) \\
 = & \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(1) \right] h_2 + o(h_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 + o(h_1) \\
 = & \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)
 \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.**

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, D_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle = df(a)(h).$$

Exemple : soit

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{pour } (x_1, x_2) \neq 0 \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Alors, pour  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_2 x_1^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$  qui sont clairement continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus, les applications partielles  $x_1 \mapsto f(x_1, 0)$  et  $x_2 \mapsto f(0, x_2)$  sont identiquement nulles, donc  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$ . Pour voir que les dérivées partielles sont continues, il est commode de poser  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$  pour obtenir  $|D_1 f(x, y)| \leq \rho$ , donc est continue en  $(0, 0)$ . Idem pour  $D_2 f$ . On a démontré que  $f$  était de classe  $C^1$ .

Dérivée d'ordre supérieur :

**Définition 22.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^2$  si toutes les dérivées partielles d'ordre deux sont continues :  $\partial_1 \partial_2 f, \partial_2 \partial_1 f, \partial_2 \partial_2 f, \partial_1 \partial_1 f$ .

Notation : parfois on notera aussi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f$ .

**Théorème 9** (Schwartz). Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  alors en tout point  $a \in U$  on a

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

*Démonstration.* Admise. □

Conséquence : si  $f$  est de classe  $C^2$  alors la matrice

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique. On l'appelle la matrice Hessienne de  $f$  au point  $a$ . On note  $D^2f(a)$  la forme quadratique associée, c'est à dire

$$D^2f(a)(h) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(a) h_i h_j.$$

**Théorème 10** (Developpement limité du deuxième ordre). *Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et soit  $a \in U$ . Alors*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} D^2f(a)(h) + o(\|h\|^2).$$

*Démonstration.* Admis car preuve tout à fait similaire au DL d'ordre 1, mais à l'ordre 2.  $\square$

**Définition 23.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$ . On dit que  $f$  admet un minimum local au point  $a \in U$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad \|h\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(a+h) \geq f(a).$$

*De même,  $f$  admet un maximum local au point  $a$  si*

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad \|h\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(a+h) \leq f(a).$$

*Le minimum (reps. maximum) est dit strict si les inégalités sont strictes.*

**Remarque.** Tout minimum global est, en particulier, un minimum local. De même pour un maximum.

**Remarque.** Un point qui est un minimum ou bien un maximum est aussi appelé extremum.

**Corollaire 4.** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et  $a \in U$ . Pour que  $f$  atteigne un minimum local (reps. maximum local) en  $a \in U$ , il est nécessaire que  $\nabla f(a) = (0, 0)$  et que  $D^2f(a)$  soit positive (reps. négative), et il suffit qu'elle soit définie positive (reps. définie négative). Dans ce dernier cas,  $a$  est un minimum local strict (resp. maximum local strict).*

*Démonstration.* Supposons que  $f$  atteigne un minimum au point  $x \in U$ . Alors pour tout  $h$  suffisamment petit,  $x+h \in U$  et  $f(a+h) \geq f(a)$ , d'où

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|) \geq f(a)$$

ce qui implique

$$\langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|) \geq 0$$

en prenant  $h = te_1$  et  $t > 0$  on obtient

$$\langle \nabla f(a), te_1 \rangle + o(t) \geq 0.$$

en divisant par  $t$  et en faisant tendre  $t \rightarrow 0$  on arrive à

$$\langle \nabla f(a), e_1 \rangle \geq 0.$$

en procédant de la même façon avec  $t < 0$  on trouve

$$\langle \nabla f(a), e_1 \rangle \leq 0,$$

d'où finalement

$$\langle \nabla f(a), e_1 \rangle = 0.$$

On faisant la même chose avec  $e_2$  on déduit que  $\nabla f(a) = (0, 0)$ .

Ensuite, on regarde l'ordre supérieur. On écrit

$$f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h) + o(\|h\|^2) \geq f(a)$$

ce qui implique, puisque  $\nabla f(a) = (0, 0)$ ,

$$\frac{1}{2} D^2 f(a)(h) + o(\|h\|^2) \geq 0.$$

Soit maintenant  $u \in \mathbb{R}^2$  un vecteur quelconque. En posant  $h = tu$  avec  $t > 0$ , en divisant par  $t$ , puis en faisant tendre  $t \rightarrow 0$ , on obtient

$$D^2 f(a)(u) \geq 0$$

ce qui prouve que  $D^2 f(a)$  est une forme quadratique positive.

Pour un point maximum, l'étude est similaire.

Supposons désormais que  $\nabla f(a) = (0, 0)$  et que  $D^2 f(a)$  soit définie positive. Montrons que  $a$  est un point minimum strict pour  $f$ . Pour cela on suppose par l'absurde que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un  $h_n$  tel que  $\|h_n\| \leq \frac{1}{n}$  et

$$f(a + h_n) \leq f(a).$$

La suite  $h_n$  converge clairement vers 0 dans  $\mathbb{R}^2$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, puisque  $\nabla f(a) = (0, 0)$ ,

$$f(a + h_n) = \frac{1}{2} D^2 f(a)(h_n) + o(\|h\|^2) \leq f(a).$$

Puisque  $S^1$  est compact, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que  $h_n/\|h_n\|$  converge vers un vecteur  $\bar{h} \in S^2$ . En divisant par  $\|h_n\|^2$  puis en passant à la limite on obtient

$$D^2 f(a)(\bar{h}) \leq 0,$$

qui contredit le fait que  $D^2 f(a)$  soit définie positive. On procède de la même façon pour un maximum.  $\square$

**Remarque :** Un point  $a \in U$  tel que  $\nabla f(a) = (0, 0)$  est appelé “point critique” de  $f$ .

**Remarque :** On a vu dans un énoncé précédent que si  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $K$  est compact, alors  $f$  admet un maximum et un minimum (global) sur  $K$ . Mais attention, en général l’extremum peut être atteint sur le bord de  $K$ , et dans ce cas la dérivée de  $f$  ne s’annule pas. Il est donc important dans l’énoncé du théorème précédent, de considérer  $U \subset \mathbb{R}^2$  ouvert.

**Remarque :** On sait d’après le chapitre précédent que les matrices symétriques sont diagonalisables dans une base orthonormée. Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux valeurs propres réelles de  $D^2f(a)$ . Pour que cette matrice soit définie positive, il suffit que  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ . On a alors affaire à un point minimum. En revanche si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , alors la matrice  $D^2f(a)$  est définie négative et on a affaire à un point maximum. Si les deux valeurs propres sont de signe opposés, on dit qu’on a un point selle. Dans ce cas, il existe une direction selon laquelle  $f$  admet un minimum, et une autre direction selon laquelle  $f$  admet un maximum. Enfin, si l’une des valeurs propres s’annule, nous ne pouvons rien en dire (plusieurs cas sont possibles dans ce cas).

**Exemple :** Soit  $a \in \mathbb{R}$  un paramètre réel et soit

$$f_a(x) = x_1^2 + ax_2^2 + \cos(x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2).$$

Alors

$$\nabla f_a(x_1, x_2) = (2x_1, 2ax_2 - \sin(x_2)).$$

La fonction  $f_a$  admet un unique point critique au point  $x = (0, 0)$ . De plus

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a - \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

d’où,

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a - 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

1. Si  $a > 1/2$  le point  $(0, 0)$  est un minimum pour  $f$ .
2. Si  $a < 1/2$  le point  $(0, 0)$  est un point selle pour  $f$ .
3. Si  $a = 1/2$  on ne peut rien en déduire.

## 2.2.4 Cas de plusieurs variables au départ et à l’arrivée

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^1$ , on a vu que pour tout point  $a \in \mathbb{R}^2$  la différentielle de  $f$  au point  $a$  notées  $D_a f$  était une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  représentée par le vecteur gradient. En d’autres termes,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow D_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

L'application linéaire  $D_a f$  est représentée par le vecteur gradient, c'est à dire

$$\text{Pour tout } h \in \mathbb{R}^n, \quad D_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle,$$

où le vecteur gradient écrit dans la base canonique est donné par

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

Ceci se généralise naturellement en dimension supérieure, c'est à dire si  $f$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^k$ , on a

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \Rightarrow D_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k).$$

L'application linéaire  $D_a f$  est représentée par la matrice jacobienne, c'est à dire,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)),$$

et

$$\text{Pour tout } h \in \mathbb{R}^n, \quad D_a f(h) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 f_k(a) & \dots & \partial_n f_k(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Bien sûr tout ce qui est écrit dans ce paragraphe vaut aussi dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.5 Dérivées composées

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions  $C^1$ , il est "bien connu" que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

Cette formule se généralise en plusieurs variables. C'est à dire, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  et  $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des applications  $C^1$  alors  $f \circ g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^k$  est aussi  $C^1$  et  $D(f \circ g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^k)$ . De plus la formule de dérivée composée s'écrit

$$\boxed{D_a(f \circ g) = D_{g(a)} f \circ D_a g}$$

**Remarque :** Dans le cas particulier où  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la dérivée de la composée revient à la formule suivante qu'il est commode de retenir

$$\partial_i(f \circ g)(x) = \partial_1 f(g(x)) \partial_i g_1(x) + \dots + \partial_n f(g(x)) \partial_i g_n(x)$$

**Exemple :** soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction définie par  $g(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2, \sin(x_2))$ . Alors  $f \circ g = f(x_1^2 - x_2, \sin(x_2))$  est  $C^1$  et

$$\partial_1 f(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = 2x_1 \partial_1 f(x_1^2 - x_2, \sin(x_2)) + \cos(x_2) \partial_2 f(x_1^2 - x_2, \sin(x_2))$$



## 2.3 Intégrales à paramètre

### 2.3.1 Intégrale à paramètre sur un segment compact

On considère  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors pour tout  $t \in [\alpha, \beta]$  fixé, la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $[a, b]$  et l'intégrale suivante

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

est bien définie au sens de Riemann.

**Théorème 11** (Continuité). *Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors*

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

*est une fonction continue sur  $[\alpha, \beta]$ . En d'autres termes*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) dx.$$

*Démonstration.* Soit  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall t \in [\alpha, \beta], |t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |F(t_0) - F(t)| \leq \varepsilon.$$

On a

$$|F(t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b f(t, x) - f(t_0, x) dx \right| \leq \int_a^b |f(t, x) - f(t_0, x)| dx$$

On va montrer que  $f$  vérifie la propriété suivante

$$(H) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall t \in [\alpha, \beta] \text{ et } \forall x \in [a, b], |t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon.$$

Supposons que (H) soit vraie et terminons la démonstration.

$$(H) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall t \in [\alpha, \beta], |t - t_0| \leq \delta,$$

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b \varepsilon dt \leq (b - a)\varepsilon,$$

cqfd.

Il reste donc à montrer (H). On raisonne par l'absurde. Supposons que (H) soit faux. Alors

$$\exists \varepsilon > 0; \forall \delta > 0; \exists (t, x) \in [\alpha, \beta] \times [a, b], |t - t_0| \leq \delta \quad |f(t, x) - f(t_0, x)| \geq \varepsilon.$$

Puisque  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  est compact, en considérant  $\delta \rightarrow 0$ , le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une sous suite  $(t_n, x_n)$  telle que  $t_n \rightarrow t_0$  et  $x_n \rightarrow x_0 \in [a, b]$ , et pour tout  $n$ ,

$$|f(t_n, x_n) - f(t_0, x_0)| \geq \varepsilon.$$

Or par continuité de  $f$ , on obtient

$$|f(t_n, x_n) - f(t_0, x_0)| \rightarrow 0,$$

une contradiction. □

**Théorème 12** (Dérivabilité). *Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On suppose que*

1.  $f$  est continue sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$
2. pour tout  $x \in [a, b]$ , la dérivée partielle en  $t$  de  $f$  existe et
3.  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  est continue sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ .

Alors

$$F(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

est une fonction  $C^1([\alpha, \beta])$  et  $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ . En d'autres termes

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx. \quad (2.2)$$

*Démonstration.* Montrons que  $f$  est dérivable sur  $] \alpha, \beta[$ . Pour cela on fixe  $t_0 \in ] \alpha, \beta[$ , et pour  $h$  suffisamment petit de sorte que  $t_0 + h \in ] \alpha, \beta[$  on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(t_0 + h) - F(t_0)) &= \frac{1}{h} \left( \int_a^b f(t_0 + h, x) dx - \int_a^b f(t_0, x) dx \right) \\ &= \int_a^b \frac{1}{h} (f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)) dx. \end{aligned}$$

Donc pour montrer que (2.2) est vraie il faut une majoration suffisamment forte de la fonction

$$\Delta(h, x) = |f(t_0 + h, x) - f(t_0, x) - h \partial_t f(t_0, x)|,$$

qui ne dépend pas de  $x \in [a, b]$ . En raisonnant de la même façon que pour montrer (H) mais en appliquant l'argument à la fonction continue  $\partial_t f(t, x)$ , on a

$$(H1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall t \in [\alpha, \beta] \text{ et } \forall x \in [a, b], |t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |\partial_t f(t, x) - \partial_t f(t_0, x)| \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$  étant fixé, appliquons maintenant l'inégalité des accroissements finis à la fonction

$$g : t \mapsto f(t, x) - (t - t_0) \partial_t f(t_0, x)$$

sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + h]$ . Puisque  $|g'(t)| \leq \varepsilon$  on a, pour tout  $h \leq \delta$  et pour tout  $x \in [a, b]$

$$|g(t_0 + h) - g(t_0)| = \Delta(h, x) \leq \varepsilon h.$$

Ceci implique

$$\left| \frac{1}{h}(F(t_0 + h) - F(t_0)) - \int_a^b \partial_t f(t_0, x) dx \right| \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

pour tout  $h \leq \delta$ . En d'autres termes on vient de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(t_0 + h) - F(t_0)) = \int_a^b \partial_t f(t, x) dx.$$

On peut faire de même pour la dérivée à gauche, ce qui montre que  $F$  est dérivable en  $t_0$ .

Enfin, en appliquant le théorème de continuité précédent à l'intégrale à paramètre  $\int_a^b \partial_t f(t, x) dx$  on obtient que la dérivée de  $F$  est continue, donc  $F$  est de classe  $C^1$ .  $\square$

**Remarque.** Un cas particulier intéressant où le théorème 12 s'applique (utile en pratique) est le suivant : si  $f$  est  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ , alors  $t \mapsto \int_a^b f(t, x) dx$  est de classe  $C^1$  sur  $]\alpha, \beta[$ .

### 2.3.2 Intégrale au sens généralisée à paramètre

#### Rappel sur les intégrales généralisées

Soit  $[a, b[$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec  $b$  éventuellement égal à  $+\infty$ , et soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour tout  $a < T < b$ , l'intégrale

$$\int_a^T f(x) dx$$

est bien définie au sens de Riemann, la fonction  $f$  étant en effet continue sur l'intervalle compact  $[a, T]$  pour tout  $T < b$ . On dit que  $f$  est intégrable au sens généralisé sur  $[a, b[$  si la limite suivante

$$\lim_{T \rightarrow b} \int_a^T f(x) dx$$

existe, et est finie. On note alors  $\int_a^b f(x) dx$  cette limite.

#### Exemples.

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- En revanche,  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .
- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  converge.
- si  $f$  et  $g$  sont positive et si  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b g(x) dx$  converge implique  $\int_a^b f(x) dx$  converge.
- si  $\int_a^b |f(x)| dx$  converge alors  $\int_a^b f(x) dx$  converge (on dit : "converge absolument").

#### Intégrale généralisée à paramètre

**Définition 24.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $f : I \times [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que  $f$  est dominée sur  $I \times [a, b[$  s'il existe  $\varphi : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_a^b \varphi(x) dx$  converge et

$$\forall t \in I, |f(t, x)| \leq \varphi(x).$$

**Exemple.** Soit  $f(t, x) = t^4 e^{-t^2 x}$  sur  $]2, 3[ \times ]0, +\infty[$ . Alors

$$|f(t, x)| \leq 81e^{-4x}$$

et  $\int_0^{+\infty} 81e^{-4x} dx$  est convergente. Donc  $f$  est dominée par  $81e^{-4x}$ .

**Théorème 13** (Continuité). Soit  $f : ]\alpha, \beta[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui est dominée sur  $I \times ]a, b[$ . Alors pour tout  $t \in ]\alpha, \beta[$  l'intégrale  $\int_a^b f(t, x) dx$  converge. De plus l'application

$$F : t \mapsto \int_a^b f(t, x) dx$$

est continue sur  $] \alpha, \beta [$ . En particulier, pour tout  $t_0 \in ] \alpha, \beta [$  on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) dx.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  la domination de  $f$ . Puisque  $\int_a^b \varphi(x) dx$  converge, et que

$$\int_a^b |f(t, x)| \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

on en déduit que  $\int_a^b f(t, x) dx$  est absolument convergente pour tout  $t$ , et de plus pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $T \in ]a, b[$  tel que

$$\int_T^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, cas compact, la fonction

$$t \mapsto \int_a^T f(t, x) dx$$

est continue. Donc il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in ]\alpha, \beta[$ ,  $|t - t_0| \leq \delta$  implique

$$\left| \int_a^T f(t, x) dx - \int_a^T f(t_0, x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t, x) dx - \int_a^b f(t_0, x) dx \right| \\ & \leq \left| \int_a^T f(t, x) dx - \int_a^T f(t_0, x) dx \right| + \left| \int_T^b f(t, x) dx - \int_T^b f(t_0, x) dx \right| \\ & \leq \varepsilon + 2 \int_T^b \varphi(x) dx \\ & \leq 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

ce qui prouve la continuité de  $F$  en  $t_0$ .  $\square$

**Théorème 14** (Dérivabilité). Soit  $f : ]\alpha, \beta[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

On suppose que

1.  $\exists t_0 \in ]\alpha, \beta[ ; \int_a^b f(t_0, x) dx$  soit convergente.
2. En tout point  $(t, x) \in ]\alpha, \beta[ \times ]a, b[$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  existe.
3. L'application  $(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  est continue et dominée sur  $] \alpha, \beta[ \times ]a, b[$ .

Alors pour tout  $t \in ]\alpha, \beta[$  l'intégrale  $\int_a^b f(t, x) dx$  est convergente et

$$F : t \mapsto \int_a^b f(t, x) dx$$

est une fonction  $C^1$  sur  $] \alpha, \beta[$ . De plus

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx.$$

*Démonstration.* Le fait que  $\int_a^b f(t, x) dx$  soit convergente pour tout  $t$  provient de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction  $C^1$   $t \mapsto f(t, x)$  qui implique

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \left( \max_{s \in [t, t_0]} \frac{\partial f}{\partial t}(s, x) \right) |t - t_0| \leq \varphi(x) |t - t_0|,$$

où  $\varphi(x)$  est la domination de  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ . On en déduit que, pour tout  $T < b$  on a

$$\left| \int_T^b f(t, x) dx - \int_T^b f(t_0, x) dx \right| \leq |t - t_0| \int_T^b \varphi(x) dx \quad (2.5)$$

et donc, nécessairement, puisque  $\int_T^b f(t_0, x) dx \rightarrow 0$  et  $\int_T^b \varphi(x) dx \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow b$ , on obtient que  $\int_T^b f(t, x) dx \rightarrow 0$  aussi en d'autres termes l'intégrale  $\int_a^b f(t, x) dx$  est convergente.

Pour tout  $T < b$ , notons

$$F_T(t) = \int_a^T f(t, x) dx \quad \text{et} \quad R_T(t) = \int_T^b f(t, x) dx,$$

de sorte que

$$F(t) = F_T(t) + R_T(t).$$

Par le théorème de dérivation, cas compact, on sait que  $F_T$  est  $C^1$  et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( F_T(t+h) - F_T(t) - h \int_a^T \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx \right) = 0.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $T$  tel que  $\int_T^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon$  et  $|\int_T^b f(t_0, x) dx| \leq \varepsilon$ . Par l'estimation (2.5) on a aussi

$$|R_T(t)| \leq \left| \int_T^b f(t_0, x) dx \right| + |t - t_0| \varepsilon \leq (1 + |t - t_0|) \varepsilon$$

Ce  $T$  étant fixé, il existe  $h_0 \leq 1$  tel que, pour tout  $h < h_0$  on ait

$$\left| F_T(t+h) - F_T(h) - h \int_a^T \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

On peut donc majorer

$$\begin{aligned} & \left| F(t+h) - F(h) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx \right| \leq \\ & \left| F_T(t+h) - F_T(h) - h \int_a^T \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx \right| + \left| R_T(t+h) - R_T(t) - h \int_T^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx \right| \\ & \varepsilon + (1 + |t - t_0|)\varepsilon + (1 + |t + 1 - t_0|)\varepsilon + \varepsilon \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| F(t+h) - F(h) - h \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx \right| = 0$$

et termine la démonstration.  $\square$

**Remarque.** Pour simplifier un peu nous avons choisi de fixer l'indétermination de l'intégrale sur la borne de droite,  $b$ , mais bien sûr on peut démontrer un théorème analogue pour l'autre borne, ou les deux, c'est à dire lorsque  $f = ]\alpha, \beta[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue ou bien  $f = ]\alpha, \beta[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

**Remarque.** De même, si les hypothèses sont vérifiées sur  $[\alpha, \beta]$  (fermé) au lieu de  $] \alpha, \beta[$  (ouvert), les mêmes conclusions restent vraies sur l'intervalle fermé.

**Exemple.** La fonction Gamma.

Pour  $t > 0$  on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Montrons que  $\Gamma$  est une fonction  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ . Pour cela il suffit de montrer que  $\Gamma$  est une fonction  $C^1$  sur tout intervalle du type  $] \alpha, \beta[$ , avec  $0 < \alpha < \beta$ .

Vérifions les hypothèses 1, 2, et 3 du théorème.

1. pour  $t = 1$  l'intégrale est clairement convergente.
2. pour tout  $x > 0$  fixé, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} x^{t-1} e^{-x} = e^{-x} \frac{\partial}{\partial t} e^{(t-1) \ln(x)} = e^{-x} \ln(x) e^{(t-1) \ln(x)} = x^{t-1} e^{-x} \ln(x),$$

qui est bien une fonction continue de  $] \alpha, \beta[ \times ]0, +\infty[$ .

3.  $f(t, x)$  est dominée sur  $] \alpha, \beta[ \times ]0, 1[$  par

$$|f(t, x)| \leq x^{\alpha-1} \ln(x) e^{-x},$$

et  $f(t, x)$  est dominée sur  $] \alpha, \beta[ \times ]1, +\infty[$  par

$$|f(t, x)| \leq x^{\beta-1} \ln(x) e^{-x}.$$

En écrivant donc l'intégrale comme une somme sur  $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$  et appliquant le théorème de dérivation des intégrales généralisées à paramètre sur chacun des morceaux, on en déduit que  $\Gamma$  est une fonction  $C^1$  comme somme de fonctions  $C^1$ .

### 2.3.3 Convergence dominée pour une suite de fonctions

**Théorème 15** (Convergence dominée). *Soit  $f_n : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions continues, indexées par  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que*

1. *(convergence simple vers une fonction continue) Il existe une fonction continue  $h : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\forall x \in [a, b[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x).$$

2. *(domination) Il existe  $g(x)$  continue (indépendante de  $n$ ) telle que  $\int_a^b g(x)dx$  converge et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$ .*

*Alors  $\int_a^b h(x)dx$  est une intégrale convergente ainsi que  $\int_a^b f_n(x)dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et l'on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)dx = \int_a^b h(x)dx.$$

*Démonstration.* Admise. □

# Chapitre 3

## Séries de Fourier

### 3.1 Introduction et premières définitions

**Rappels sur les complexes.** On note  $\mathbb{C}$  le corps des complexes. Pour  $z \in \mathbb{C}$  on note  $i$  le nombre imaginaire pur, ainsi que  $Re(z)$  et  $Im(z)$  les parties réelles et imaginaires de  $z$ . On note  $|\cdot|$  le module complexe,  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . On rappelle que pour  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , l'exponentielle complexe est définie par la formule

$$e^z = e^{|z|} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

où  $\theta$  est l'argument du complexe  $z$  (faire dessin).

**L'espace vectoriel  $E$ .** Dans tout ce chapitre  $E$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont 1-périodique (c'est à dire  $f(x + 1) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ). Continue par morceaux veut dire qu'il existe une subdivision finie  $0 = a_0 < a_1 \cdots < a_N = 1$  telle que la restriction de  $f$  à chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  est continue et se prolonge de façon continue à  $[a_i, a_{i+1}]$ . En d'autre terme  $f$  est continue sur chacun des morceaux  $]a_i, a_{i+1}[$  et admet des limites à droite et à gauche en tout point  $a_i$ . De plus on suppose que la valeur de  $f$  prise aux points  $a_i$  est, soit la limite à droite, soit la limite à gauche (sans prendre parti pour l'un ou l'autre, i.e. les deux sont admissibles dans notre espace  $E$ ).

L'intégrale d'une fonction à valeur complexe est

$$\int_0^1 f(x) dx := \int_0^1 Re(f(x)) dx + i \int_0^1 Im(f(x)) dx.$$

**Produit Hermitien.** Pour tout  $f, g \in E$  on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \in \mathbb{C}.$$

L'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est un produit scalaire Hermitien sur l'espace vectoriel complexe  $E$ . C'est à dire qu'elle vérifie, pour tout  $f, g, h \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , les trois propriétés suivantes :



1. (Symétrie Hermitienne)  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
2. (Sesquilinearité)  $\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$  et  $\langle f, \lambda g + h \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
3. (Définie positive)  $\langle f, f \rangle > 0$  pour  $f \neq 0$  (et vaut 0 sinon).

On remarque facilement que  $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$ . La Norme Hermitienne associée est

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un espace vectoriel complexe muni d'un produit Hermitien est appelé Espace préhilbertien (complexe) (s'il est de dimension finie on dit "Espace Hermitien", au lieu de "Espace Euclidien" dans le cas réel). Une majeure partie de la théorie des espaces euclidiens s'adapte directement aux espaces Hermitiens, et plus généralement aux espaces préhilbertiens, c'est à dire que  $\|f\|$  est bien une norme, et les notions d'orthogonalité, de projection orthogonale et de famille orthonormée sont les mêmes. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste vraie :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

ce qui se traduit ici en

$$\left| \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**La famille  $\mathbf{e}_n$ .** Les séries de Fourier sont construites à partir d'une "base" de  $E$  bien particulière. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $\mathbf{e}_n \in E$  l'élément

$$\mathbf{e}_n = e^{2i\pi n x} \in E.$$

**Proposition 19.** *La famille  $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée dans  $E$ .*

*Démonstration.*

$$\|\mathbf{e}_n\|^2 = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle = \int_0^1 e^{2i\pi n x} e^{-2i\pi n x} dx = \int_0^1 1 dx = 1,$$

donc les  $\mathbf{e}_n$  sont tous de norme 1. De plus si  $n \neq k$  on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k \rangle &= \int_0^1 e^{2i\pi n x} e^{-2i\pi k x} dx = \int_0^1 e^{2i\pi(n-k)x} dx = \left[ \frac{e^{2i\pi(n-k)x}}{2i\pi(n-k)} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{2i\pi(n-k)} - 1}{2i\pi(n-k)} = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est bien orthonormée. □

**Polynôme trigonométrique.** On appelle polynôme trigonométrique de degré  $N$  (complexe) toute fonction  $P \in E$  de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \mathbf{e}_n,$$

avec  $c_n \in \mathbb{C}$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré  $N$  est le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par les  $(e_n)_{n \in [-N, N]}$ . La terminologie est motivée par l'analogie avec les polynômes et le fait que  $\mathbf{e}_n = (e^{2i\pi x})^n$ .

**Coefficients de Fourier.** Si  $P$  est un polynôme trigonométrique comme ci dessus, on remarque que  $c_n = \langle P, \mathbf{e}_n \rangle$ . En d'autres termes,  $c_n$  est le  $n$ -ième coefficient de  $P$  dans la base orthonormée  $(\mathbf{e}_{-N}, \dots, \mathbf{e}_N)$ . Ceci motive la définition suivante.

**Définition 25.** Soit  $f \in E$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Le  $n$ -ième coefficient de Fourier associé à  $f$  est le nombre complexe noté  $\hat{f}_n \in \mathbb{C}$  défini par
 
$$\hat{f}_n = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi n x} dx.$$
2. Le polynôme trigonométrique de degré  $N$  associé à  $f$  est
 
$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n \mathbf{e}_n \in E,$$
 c'est à dire, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,
 
$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{2i\pi n x}.$$
3. La série de Fourier associée à  $f$  est la série de fonctions
 
$$S(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \mathbf{e}_n \in E,$$
 où la notation  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$  désigne  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (u_n + u_{-n})$ , lorsque cette limite existe.

Tout l'enjeu de la théorie des séries de Fourier, est de déterminer en quel sens la série de Fourier associée à une fonction  $f$  converge, et si elle converge, de vérifier que sa limite est bien la fonction  $f$  de départ. En effet il peut se passer des choses bien étranges si la fonction  $f$  n'est pas assez régulière, par exemple que la série de Fourier associée diverge, ou bien quelle converge mais vers une toute autre fonction ! Dans ce cours nous verrons par exemple, que si  $f$  est de classe  $C^1$  alors elle est toujours la limite de sa série de Fourier en tout point.

Les séries Fourier permettent de décomposer une fonction donnée représentant par exemple un signal sonore, qui évolue au cours de temps, en somme de fonctions élémentaires, ou signaux élémentaires. Les  $c_n \mathbf{e}_n$  représentent des "sons purs" de

fréquence  $|n|$  qui est un multiple entier de la fréquence fondamentale 1 (les “harmoniques”). La théorie de Fourier permet de retrouver le signal d’origine  $f$ , en additionnant des sons “purs” de la même façon que le ferait, par exemple, un synthétiseur. Mais les séries de Fourier ont bien d’autres applications, par exemple pour résoudre diverses équations de la physique comme l’équation de la chaleur (historiquement à l’origine des travaux de Fourier), mais également en traitement d’image, en compression de donnée, etc.

**Remarque.** Il faut faire un peu attention à la notation  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$  et ce qu’elle veut dire, en terme de convergence. Par exemple, il se peut que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n + u_{-n}$  existe sans pour cela que les séries  $\sum_{n=0}^N u_n$  et  $\sum_{n=0}^N u_{-n}$  soient convergentes “séparément”.

**Remarque.** Si  $P_N : E \rightarrow E_N$  désigne la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel engendré par  $(e_{-N}, \dots, e_N)$ , alors pour tout  $f \in E$ , on a  $S_N = P_N(f)$ . En particulier,

$$\|f - S_N\| = \inf_{P \in E_N} \|f - P\|.$$

Ceci veut dire que le polynôme trigonométrique  $S_N$  est la meilleure approximation possible de la fonction  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|$ , parmi tous les polynômes trigonométriques de degré au plus  $N$ .

## 3.2 Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier

**Proposition 20.** Si  $f, g \in E$  alors

1.  $\widehat{(f + g)}_n = \hat{f}_n + \hat{g}_n$
2. si  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors  $\widehat{(\lambda f)}_n = \lambda \hat{f}_n$
3.  $\widehat{(\overline{f})}_n = \overline{\hat{f}_{-n}}$
4. Si de plus  $f$  est  $C^1$  sur  $[0, 1]$  alors

$$\widehat{(f')}_n = 2i\pi n \hat{f}_n.$$

5. Plus généralement, si  $f$  est de classe  $C^k$ , on a

$$\widehat{(f^{(k)})}_n = (2i\pi n)^k \hat{f}_n.$$

*Démonstration.* Les propriétés 1 à 3 découlent directement de la définition de  $\hat{f}_n$ . Pour démontrer 4, nous utilisons une intégration par parties :

$$\widehat{(f')}_n = \int_0^1 f'(x) e^{-2i\pi n x} dx = [f(x) e^{-2i\pi n x}]_0^1 - \int_0^1 f(x) (-2i\pi n) e^{2i\pi n x} dx,$$

d’où le résultat. Pour obtenir 5 il suffit d’appliquer successivement 4  $k$ -fois.

**Remarque.** (Cas des fonctions réelles) Si  $f$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}$  alors

$$\overline{\hat{f}_n} = \hat{f}_{-n}.$$

Dans ce cas, la série de Fourier associée est la série réelle suivante

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \mathbf{e}_n = \hat{f}_0 + \sum_{n \geq 1} \hat{f}_n \mathbf{e}_n + \hat{f}_{-n} \mathbf{e}_{-n} = \hat{f}_0 + \sum_{n \geq 1} \hat{f}_n \mathbf{e}_n + \overline{\hat{f}_n \mathbf{e}_n} = \hat{f}_0 + \sum_{n \geq 1} 2\operatorname{Re}(\hat{f}_n \mathbf{e}_n).$$

Donc, si on note  $a_0 = \hat{f}_0$  puis  $a_n$  et  $b_n$  les nombres réels, pour  $n \geq 1$ ,

$$\boxed{a_n = 2\operatorname{Re}(\hat{f}_n), \quad b_n = -2\operatorname{Im}(\hat{f}_n)}, \quad (3.1)$$

autrement dit

$$\boxed{a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x) dx, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx}$$

alors la série de Fourier réelle associée à  $f$  est

$$\boxed{S(f) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)}.$$

(Notons que  $\cos(2\pi n x)$  et  $\sin(2\pi n x)$  n'est pas une famille orthonormée mais seulement orthogonale pour le produit scalaire  $\int_0^1 f \bar{g} dt$ .)

□

### 3.3 Inégalité de Bessel et premier théorème de convergence

**Proposition 21.** Soit  $f \in E$  (c'est à dire continue par morceaux et 1-périodique). Alors la série  $\sum |\hat{f}_n|^2$  converge et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

*Démonstration.* Pour tout  $N$  fixé,  $f - S_N$  est orthogonal à  $S_N$  (on a vu précédemment que  $S_N = P_N(f)$  où  $P_N$  est la projection orthogonale sur  $E_N$ , l'espace des polynômes trigonométriques de degré au plus  $N$ ). En appliquant Pythagore on obtient

$$\|f\|^2 = \|f - S_N\|^2 + \|S_N\|^2.$$

Donc

$$\|S_N\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Or

$$\|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}_n|^2.$$

On conclut en faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  (notez que la limite existe car c'est un sup, les termes ici étant tous positifs). □

Une conséquence importante est la proposition suivante.

**Proposition 22.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^1$  et 1-périodique. Alors  $S(f)$ , la série de Fourier de  $f$ , converge normalement vers  $f$ . En particulier elle converge uniformément et simplement vers  $f$ , donc*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{2i\pi n x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Puisque  $f$  est de classe  $C^1$ , on sait que  $\hat{f}'_n = 2i\pi n \hat{f}_n$  et  $f'$  est continue. Donc d'après l'inégalité de Bessel, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\hat{f}_n|^2$  converge. On peut donc utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour écrire

$$\sum_{n=-N}^N \sup_{x \in [0,1]} |\hat{f}_n e^{2i\pi n x}| \leq |\hat{f}_0|^2 + \left( \sum_{n \neq 0; n=-N}^N n^2 |\hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \neq 0; n=-N}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

puis on fait  $N \rightarrow +\infty$ . Le membre de droite converge, donc la série converge normalement. Le fait que la limite soit  $f$  provient du Lemme suivant.  $\square$

**Lemme 16.** *Supposons que  $S(f)$  converge uniformément. Alors sa limite vaut  $f$ .*

La démonstration du Lemme utilise l'identité de Parseval que nous verrons plus tard, donc est laissée en suspens pour l'instant.

### 3.4 Lemme de Riemann-Lebesgue

Nous aurons besoin du Lemme suivant.

**Proposition 23.** *Si  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors*

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) e^{2i\pi \lambda x} = 0.$$

*En particulier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \hat{f}_n = 0$ , et*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(\lambda x) = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(\lambda x) = 0.$$

*Démonstration.* La fonction  $f$  étant continue sur le compact  $[0, 1]$ , elle est uniformément continue. Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N > 0$  tel que si on note  $x_k = \frac{k}{N}$  on a

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } x \in [x_k, x_{k+1}].$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(x) e^{2i\pi\lambda x} dx \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{2i\pi\lambda x} dx \\
&\leq \varepsilon + \left( \max_{[0,1]} f \right) \frac{|e^{2i\pi\lambda x_{k+1}} - e^{2i\pi\lambda x_k}|}{|2i\pi\lambda|} \\
&\leq \varepsilon + C \frac{1}{|\lambda|}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

et on conclut en faisant tendre  $\lambda \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Remarque.** Supposons que  $f \in C^1$ . Alors puisque  $f'$  est continue, le Lemme de Riemann-Lebesgue implique  $(\widehat{f'})_n \rightarrow 0$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$  donc  $n\hat{f}_n \rightarrow 0$ , en d'autres termes  $\hat{f}_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  et décroît vers 0 avec une certaine vitesse, au moins en  $1/n$ . Si  $f$  était encore plus régulière, par exemple  $C^2$ , on aurait  $\hat{f}_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Etc. Ceci est un fait général : la régularité de la fonction se "lit" sur la vitesse de convergence vers 0 des coefficients de Fourier.

## 3.5 Deux énoncés de convergence

### 3.5.1 Convergence ponctuelle

Notre deuxième résultat de convergence est le suivant.

**Théorème 17.** (*Dirichlet*) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^1$  par morceaux telle que  $f(x^+)$  et  $f(x^-)$  ainsi que  $f'(x^+)$  et  $f'(x^-)$  existent en tout point, et 1-périodique. Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier si  $f$  est continue au point  $x$  (et dérivable à gauche et à droite) on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{2i\pi n x}.$$

La démonstration nécessite le petit lemme suivant.

**Lemme 18.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi n x} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$$

*Démonstration.* On écrit  $D_N = 1 + S + \bar{S}$  où

$$S = \sum_{n=1}^N e^{2i\pi n x} = e^{2i\pi x} \frac{1 - e^{2i\pi N x}}{1 - e^{2i\pi x}} = e^{2i\pi x} \frac{e^{i\pi N x}}{e^{i\pi x}} \left( \frac{e^{-i\pi N x} - e^{i\pi N x}}{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}} \right) = e^{i\pi(N+1)x} \frac{\sin(\pi N x)}{\sin(\pi x)}$$

Il résulte que

$$D_N = 1 + 2\operatorname{Re}(S) = 1 + 2\frac{\sin(\pi Nx) \cos(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

Puis, en utilisant la formule

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

on obtient

$$D_N = 1 + \frac{\sin((2N+1)\pi x) + \sin(-\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

□

*Démonstration du Théorème 17.* Ecrivons

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{-N}^N \hat{f}_n \mathbf{e}_n(x) = \sum_{n=-N}^N \left( \int_0^1 f(u) e^{-2i\pi n u} du \right) e^{2i\pi n x} \\ &= \int_0^1 f(u) \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi n(x-u)} du \\ &= \int_0^1 f(u) D_N(x-u) du = \int_0^1 f(u) D_N(u-x) du. \end{aligned}$$

Pour simplifier on suppose que  $f$  est continue au point  $x$ . En posant  $u-x=v$  on obtient

$$S_N(f)(x) = \int_{-x}^{-x+1} f(v+x) D_N(v) dv.$$

Puisque  $f$  et  $D_N$  sont toutes deux 1-périodique on peut écrire

$$S_N(f)(x) = \int_0^1 f(x+v) D_N(v) dv = \int_0^1 f(x+v) \frac{\sin(\pi(2N+1)v)}{\sin(\pi v)} dv$$

En particulier pour  $f=1$  on a  $\hat{f}_n=0$  pour tout  $n \neq 0$  donc  $D_N(1)(x) = 1$  d'où

$$\int_0^1 D_N(x) dx = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 [f(x+v) - f(x)] \frac{\sin(\pi(2N+1)v)}{\sin(\pi v)} dv}$$

Or, puisque  $f$  est dérivable en  $x$ , il résulte que

$$v \mapsto \frac{f(x+v) - f(x)}{\sin(\pi v)}$$

est continue sur  $[0, 1]$  (y compris en  $v = 0$ ). On peut donc appliquer le Lemme de Riemann-Lebesgue qui implique

$$S_N(f)(x) - f(x) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où la conclusion. Si maintenant  $f$  n'est pas continue en  $x$  mais est dérivable à droite et à gauche, on peut exploiter le fait que  $D_N(x)$  soit impair pour écrire

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^1 \left( \frac{f(x+v) + f(x-v) - f(x^+) - f(x^-)}{2} \right) D_N(v) dv$$

(qui s'appelle la "formule de Dirichlet") et on conclut de la même façon.  $\square$

### 3.5.2 Théorème de Féjer

Nous aurons besoin de la formule suivante.

**Lemme 19.**

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u = \frac{\sin^2(Nu/2)}{\sin(u/2)}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} 1 - e^{iu} &= e^{i\frac{u}{2}} (e^{-i\frac{u}{2}} + e^{i\frac{u}{2}}) = -e^{i\frac{u}{2}} 2i \sin\left(\frac{u}{2}\right). \\ 1 - e^{iNu} &= -e^{i\frac{Nu}{2}} 2i \sin\left(\frac{Nu}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{(n+\frac{1}{2})iu} = \frac{\sin(\frac{Nu}{2})}{\sin(\frac{u}{2})} e^{i\frac{Nu}{2}}.$$

Puis on conclut en prenant la partie imaginaire.  $\square$

**Théorème 20.** (Féjer) Soit  $f \in E$  une fonction continue, 1 périodique. Alors en notant

$$M_N(f) = \frac{1}{N}(S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{N-1}(f)),$$

la suite de fonctions  $M_N(f)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

*Démonstration.* On a vu précédemment la formule "de Dirichlet"

$$S_N(f)(x) = \int_0^1 f(x+v) \frac{\sin(\pi(2N+1)v)}{\sin(\pi v)} dv$$

d'où

$$\begin{aligned} M_N(f)(x) &= \frac{1}{N} \int_0^1 f(x+v) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(\pi(n+\frac{1}{2})2v)}{\sin(\pi v)} dv \\ &= \frac{1}{N} \int_0^1 f(x+v) \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv \end{aligned}$$



En particulier pour  $f = 1$  on a  $S_N = 1$  pour tout  $N$ , d'où  $M_N = 1$  et donc

$$\frac{1}{N} \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv = 1.$$

On en déduit que

$$M_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{N} \int_0^1 (f(x+v) - f(x)) \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv.$$

Maintenant on utilise le fait que  $f$  soit uniformément continue sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x$  et pour tout  $|v| \leq \delta$ ,

$$|f(x+v) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, avec ces mêmes quantificateurs,

$$\frac{1}{N} \int_0^\delta |f(x+v) - f(x)| \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

car  $\frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv \sim_0 N$ . D'autre part

$$\frac{1}{N} \int_\delta^1 |f(x+v) - f(x)| \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv \leq \frac{A(\delta)}{N},$$

avec

$$A(\delta) = \left(2 \max_{\mathbb{R}} |f|\right) \int_\delta^1 \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv$$

Si  $N$  est suffisamment grand devant  $\delta$ , on obtient

$$\frac{1}{N} \int_\delta^1 |f(x+v) - f(x)| \frac{\sin^2(\pi v N)}{\sin^2(\pi v)} dv \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Au final on a bien montré que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_0$  tel que pour  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $N > N_0$ ,

$$|M_N(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes,  $M_N$  converge uniformément vers  $f$ . □

La conséquence immédiate suivante du Théorème de Féjer est d'une importance capitale.

**Corollaire 5.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $f \in E$  il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que*

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

*En particulier*

$$\|f - P\| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Pour la première assertion il suffit de remarquer que  $M_N(x)$  est un polynôme trigonométrique et d'appuyer le Théorème de Féjer. Pour la deuxième, il suffit de majorer

$$\|f - P\| = \left( \int_0^1 \|f(x) - P(x)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| \left( \int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

□

**Remarque.** Il est possible à partir du théorème de Féjer, de démontrer le théorème de Stone Weierstrass : toute fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  peut être approchée de façon uniforme par des fonctions polynomiales.

## 3.6 Convergence en norme et Théorème de Parseval

### 3.6.1 Théorème de Parseval

**Proposition 24.** (Parseval) Pour tout  $f \in E$  (c'est à dire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux et 1-périodique) on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - S_N\| \rightarrow 0.$$

De plus

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2.$$

*Démonstration.* On a déjà une inégalité, d'après Bessel. Pour l'autre inégalité, on utilise une propriété d'approximation : pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour tout  $f \in E$ , il existe  $\tilde{f}$  continue telle que

$$\|f - \tilde{f}\| \leq \varepsilon.$$

En effet, pour construire  $\tilde{f}$  il suffit de faire une "jonction" affine sur des intervalles de taille  $\simeq \varepsilon$  en les points de discontinuité de la fonction  $f$ .

Par suite,  $\tilde{f}$  étant continue, on sait d'après la section précédente que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $P$  polynôme trigonométrique tel que  $\|\tilde{f} - P\| \leq \varepsilon$ .

On a donc trouvé  $P$  polynôme trigonométrique tel que

$$\|f - P\| \leq \varepsilon.$$

Or, comme  $S_N$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $E_N$ , pour tout  $N \geq \deg(P)$  on a nécessairement

$$\|f - S_N\| \leq \|f - P\| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve

$$\|f - S_N\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier,

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}_n|^2 = \|S_N\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \|f\|^2.$$

□

Une conséquence directe de l'identité de Parseval est l'injectivité de l'opérateur de Fourier sur l'espace  $E$ .

**Corollaire 6.** Soit  $f$  et  $g$  des fonctions de  $E$  telles que  $\hat{f}_n = \hat{g}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors  $f = g$ .

### 3.6.2 Preuve du Lemme 16

On est maintenant en mesure de démontrer le Lemme 16. Soit  $g$  la fonction continue qui est la limite uniforme des  $S_N(f)$ . Pour montrer que  $f = g$ , au vu du Corollaire 6, il suffit de montrer que  $\hat{g}_n = \hat{f}_n$  pour tout  $n$ . Or puisque la limite est uniforme on peut écrire

$$\hat{g}_n = \int_0^1 g(x)e_{-n}(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(x)e_{-n}(x)dx = \hat{f}_n.$$

### 3.6.3 Exemple d'application de l'identité de Parseval

Soit  $f \in E$  la fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , 1-périodique, telle que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x(x - 1)$ . Alors

$$\hat{f}_n = \int_0^1 x(x - 1)e^{-2i\pi nx} dx = \int_0^1 x^2 e^{-2i\pi nx} dx - \int_0^1 x e^{-2i\pi nx} dx.$$

Pour  $n = 0$  on trouve

$$\hat{f}_0 = \int_0^1 x^2 - x dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Pour  $n \neq 0$  on calcule

$$\int_0^1 x e^{-2i\pi nx} dx = \left[ x \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi nx}}{2i\pi n} dx = -\frac{1}{2i\pi n}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-2i\pi nx} dx = \left[ x^2 \frac{e^{-2i\pi nx}}{-2i\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 2x \frac{e^{-2i\pi nx}}{2i\pi n} dx = -\frac{1}{2i\pi n} + \frac{1}{i\pi n} \int_0^1 x e^{-2i\pi nx} dx = -\frac{1}{2i\pi n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

d'où

$$\hat{f}_n = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2\pi^2 n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Puisque  $f$  est dérivable en tout point  $x \in ]0, 1[$ , d'après le Théorème de Dirichlet elle est égale à sa série de Fourier, d'où l'égalité

$$x(x-1) = -\frac{1}{6} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2\pi^2 n^2} e^{2i\pi n x} \quad \forall x \in ]0, 1[.$$

Ou encore

$$x(x-1) = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (e^{2i\pi n x} + e^{-2i\pi n x})$$

ce qui entraîne l'identité

$$x(x-1) = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x) \quad \forall x \in ]0, 1[.$$

D'autre part

$$\|f\|^2 = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \int_0^1 x^2(1-2x+x^2) dx = \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{30}}$$

D'où, en appliquant Parseval,

$$\frac{1}{6^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{4\pi^4 n^4} = \frac{1}{30}.$$

Qui peut encore s'écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

### 3.6.4 Inégalité de Wirtinger

Voici une jolie application du théorème de Parseval.

**Proposition 25** (Inégalité de Wirtinger). *Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  une fonction 1-périodique. Alors*

$$\int_0^1 |f(x) - m_f|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx,$$

où  $m_f = \int_0^1 f(x) dx$ .

*Démonstration.* On se ramène au cas où  $m_f = 0$ . Ensuite, puisque  $f$  est  $C^1$  on a

$$\hat{f}'_n = 2i\pi n \hat{f}_n,$$

et  $\hat{f}_0 = 0$  car  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  par hypothèse. On applique alors Parseval

$$\int_0^1 |f'|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |2i\pi n \hat{f}_n|^2 \geq 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\hat{f}_n|^2 = 4\pi^2 \int_0^1 |f|^2 dx.$$

□

### 3.7 Application à l'équation de la chaleur

Les séries de Fourier ont été introduites par J. Fourier vers 1800 pour résoudre l'équation de la chaleur. Voici un modèle très simplifié. On considère une barre "infinie" et "très fine" identifiée à l'axe  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u(t, x)$  la température de la barre au point  $x$ , à l'instant  $t$  (on suppose qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie dans l'atmosphère). L'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x), \quad c > 0. \quad (E)$$

**Théorème 21.** *Pour toute donnée initiale  $f \in C^3(\mathbb{R})$  1-périodique, il existe une unique solution  $u(t, x) \in C^2([0, +\infty[ \times \mathbb{R})$  pour l'équation (E), 1-périodique en  $x$  pour tout  $t$  fixé et vérifiant la condition initiale*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - f(x)| \right) = 0.$$

*Démonstration.* Supposons que cette solution existe. Alors pour tout  $t$  fixé on peut développer  $u(t, x)$  en série de Fourier

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e_n,$$

avec

$$c_n(t) = \int_0^1 u(t, x) e^{-2i\pi n x} dx.$$

D'après le théorème de dérivation, cas compact, et puisque  $u$  vérifie l'équation, on peut écrire

$$\begin{aligned} c'_n(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \int_0^1 c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) e^{-2i\pi n x} dx. \end{aligned}$$

Puis, en intégrant par parties deux fois,

$$\begin{aligned} &= c \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) 2i\pi n e^{-2i\pi n x} dx \\ &= c \int_0^1 u(t, x) (2i\pi n)^2 e^{-2i\pi n x} dx \\ &= -4\pi^2 c n^2 c_n(t). \end{aligned}$$

D'où,

$$c_n(t) = e^{-4\pi^2 c n^2 t} c_n(0).$$

Or en utilisant la condition initiale, la convergence uniforme permet de passer à la limite sous l'intégrale pour obtenir

$$\lim_{t \rightarrow 0} c_n(t) = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) e^{-2i\pi n x} dx = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \hat{f}_n.$$

Donc finalement  $c_n(0) = \hat{f}_n$ . On vient de démontrer que si  $u$  existe, alors elle est forcément la fonction

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{-4\pi^2 c n^2 t} e^{2i\pi n x}.$$

Mais la fonction ci dessus vérifie toutes les hypothèses du théorème. Donc la solution existe, et est uniquement déterminée par la série de Fourier ci dessus.  $\square$

**Remarque.** Lorsque  $t \rightarrow +\infty$  on voit que  $u(t, x)$  converge vers  $\hat{f}_0$ , qui n'est autre que la moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Donc la température tend à se répartir de façon uniforme dans la barre au cours du temps.

# Chapitre 4

## Intégrale double et triple

### 4.1 Intégrale double

On suppose connu l'intégrale de Riemann de dimension 1. Dans ce chapitre on étend cette notion à la dimension 2.

#### 4.1.1 Fonction intégrable

**Définition 26.** On appelle pavé de  $\mathbb{R}^2$  tout ensemble du type  $P = I \times J$  où  $\bar{I} = [a, b]$  et  $\bar{J} = [c, d]$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . On dit que  $P$  est fermé si  $I$  et  $J$  sont fermés. On appelle Aire de  $P$  le nombre

$$\mu(P) = (b - a) \times (d - c).$$

**Notation.** Si  $A \subset \mathbb{R}^2$  on note  $\mathbf{1}_A(x)$  la fonction indicatrice de  $A$

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 27.** Soit  $P$  un pavé de  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  est dite en escalier, et on note  $f \in \mathcal{E}(P)$ , si on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{1}_{P_i}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

avec  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et où les  $P_i \subset P$  sont des pavés. On dit alors que  $(\lambda_i, P_i)_{i=1, \dots, N}$  est bien adapté à  $f$ .

**Proposition 26.** Soit  $f \in \mathcal{E}(P)$  alors le nombre  $\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu(P_i)$  ne dépend pas du choix des  $(\lambda_i, P_i)$  bien adaptés à  $f$ . On note ce nombre :

$$\int_P f.$$

**Définition 28.** Soit  $P \subset \mathbb{R}^2$  un pavé fermé et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $P$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $g, h \in \mathcal{E}(P)$  telles que  $g \leq f \leq h$  et

$$\int_P (h - g) \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, il est clair que

$$\sup_{g \in \mathcal{E}(P) \text{ et } g \leq f} \int_P g = \inf_{h \in \mathcal{E}(P) \text{ et } h \geq f} \int_P h.$$

On note ce nombre

$$\int_P f.$$

**Exemple important.** Si  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors elle est intégrable. De plus, la théorie développée dans ce chapitre s'applique à la classe générale des fonctions intégrables, mais en pratique on appliquera le plus souvent les énoncés à des fonctions continues.

**Proposition 27** (Propriétés de l'intégrale). Soit  $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$  intégrables. Alors

1.  $\int_P (g + f) = \int_P g + \int_P f$
2.  $|\int_P f| \leq \int_P |f|$
3.  $f \leq g \Rightarrow \int_P f \leq \int_P g$

*Démonstration.* on démontre d'abord pour les fonctions en escalier puis on raisonne par approximation.  $\square$

**Théorème 22.** Soit  $P = [a, b] \times [c, d]$  un pavé fermé et  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. On suppose de plus que pour tout  $x_0 \in [a, b]$  la fonction

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

est Riemann intégrable (comme fonction d'une seule variable) sur  $[c, d]$ . Alors la fonction

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  et on a

$$\int_P f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $f(x, y) = \mathbf{1}_Q(x, y)$  où  $Q \subset P$  est un pavé, de la forme  $I \times J$ . On remarque que

$$\mathbf{1}_Q(x, y) = \mathbf{1}_I(x) \mathbf{1}_J(y).$$

Par ailleurs, par définition de l'intégrale pour les fonctions en escalier,  $\int_P \mathbf{1}_Q = \mu(Q) = \ell(I)\ell(J)$ , où  $\ell(I)$  est la longueur de l'intervalle  $I$ . D'autre part  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy =$



$\mathbf{1}_I(x)\ell(J)$  donc  $\int_c^d f(x, y)dy$  est une fonction en escalier 1D et

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \ell(I)\ell(J) = \int_P \mathbf{1}_Q.$$

On en déduit facilement que si  $f(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{1}_{P_i}$  est en escalier, alors le théorème est vrai. Maintenant si  $f$  est intégrable sur  $P$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $g, h \in \mathcal{E}(P)$  telles que  $g \leq f \leq h$  et  $\int_P (h - g) \leq \varepsilon$ . Soit  $x \in [a, b]$  fixé. Alors, puisque  $y \mapsto f(x, y)$  est intégrable on a  $g \leq f(x, y) \leq h$  d'où

$$\underbrace{\int_c^d g(x, y)dy}_{\tilde{g}(x)} \leq \underbrace{\int_c^d f(x, y)dy}_{F(x)} \leq \underbrace{\int_c^d h(x, y)dy}_{\tilde{h}(x)}.$$

$\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sont deux fonctions en escalier qui vérifient

$$\tilde{g}(x) \leq F(x) \leq \tilde{h}(x)$$

par définition de l'intégrale 1D on a

$$\int_P g = \int_a^b \tilde{g}(x) \leq \int_a^b F(x) \leq \int_a^b \tilde{h}(x) = \int_P h \quad (4.1)$$

or  $\int_a^b \tilde{h}(x) - \tilde{g}(x)dx \leq \varepsilon$  donc  $F$  est intégrable sur  $[a, b]$ . De plus en soustrayant (4.1) avec

$$\int_P g \leq \int_P f \leq \int_P h$$

on obtient

$$\left| \int_P f - \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Puisque  $\varepsilon$  est arbitraire, on en déduit l'égalité. □

**Corollaire 7** (Théorème de Fubini pour un pavé). *Si  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable et  $y \mapsto f(x, y)$  et  $x \mapsto f(x, y)$  sont intégrables alors*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

**Remarque.** Par exemple, le corollaire s'applique lorsque  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (comme fonction de deux variables).

#### 4.1.2 Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$

**Définition 29.** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  une partie bornée. On dit que  $D$  est quarrable si  $(x, y) \mapsto \mathbf{1}_D(x, y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose alors*

$$\mu(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_D.$$

**Proposition 28.** *A et B étant quarrables,  $A \cap B$  et  $A \cup B$  sont aussi quarrables et*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

*Démonstration.* Provient directement des formules suivantes :

$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B},$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

□

**Proposition 29.** *Soient  $u$  et  $v$  des fonctions continues de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $u \leq v$ . Alors*

$$D(u, v) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

*est quarrable et on a*

$$\mu(D(u, v)) = \int_a^b u(x) - v(x) dx.$$

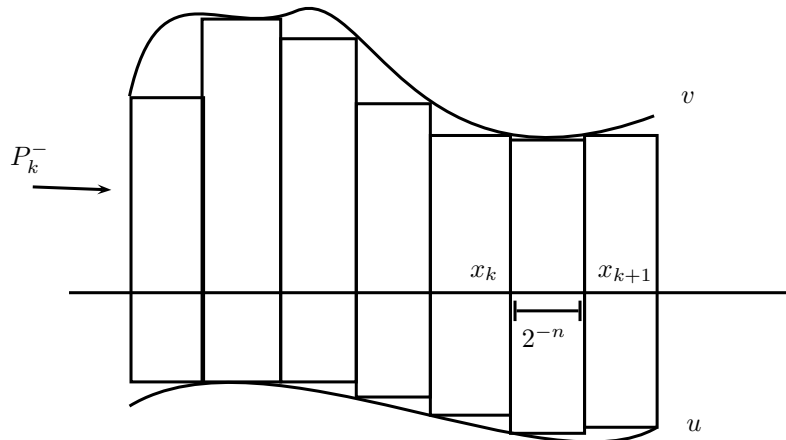
*Démonstration.* Soit  $\sigma$  la subdivision régulière de  $[a, b]$  de pas  $\frac{b-a}{2^n}$  suivante

$$x_0 = a \quad x_k = a + k \frac{b-a}{2^n}, \quad k = 0, \dots, 2^n.$$

Soit  $P_k^+$  le pavé de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $[x_k, x_{k+1}] \times [u_k^-, v_k^+]$  et soit  $P_k^-$  le pavé de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $[x_k, x_{k+1}] \times [u_k^+, v_k^-]$  où

$$u_k^+ = \max_{[x_k, x_{k+1}]} u \quad u_k^- = \min_{[x_k, x_{k+1}]} u$$

$$v_k^+ = \max_{[x_k, x_{k+1}]} v \quad v_k^- = \min_{[x_k, x_{k+1}]} v.$$



Alors  $h_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{P_k^+}$  et  $g_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{P_k^-}$  sont en escalier et

$$g_n \leq \mathbf{1}_D \leq h_n.$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2} h_n - g_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} |x_k - x_{k+1}| [v_k^+ - u_k^- - (v_k^- - u_k^+)]$$

qui converge vers 0 quand  $k \rightarrow +\infty$  par uniforme continuité de  $u$  et  $v$ .

Donc  $\mathbf{1}_D$  est bien intégrable. De plus, par le théorème de Fubini, si  $D(u, v) \subset [a, b] \times [c, d] =: P$  on a,

$$\int_P \mathbf{1}_D = \int_a^b \left( \int_c^d \mathbf{1}_{D(u,v)}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b v(x) - u(x) dx.$$

□

**Remarque.** On admettra le théorème suivant : si  $D \subset \mathbb{R}^2$  est quarrable et si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors le prolongement de  $f$  par 0 en dehors de  $D$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 30.** Soient  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : D(u, v) \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. Alors la fonction  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$  est elle même continue et on a

$$\int_{D(u,v)} f = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (4.2)$$

*Démonstration.* Par le changement de variables  $y = u(x) + t(v(x) - u(x))$  on obtient

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy = \int_0^1 \varphi(x, t) dt$$

où

$$\varphi(x, t) = f(x, u(x) + t(v(x) - u(x)))(v(x) - u(x)).$$

$\varphi : [a, b] \times [0, 1]$  est continue donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique (cas compact), ainsi  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$  est continue. Soit  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  par 0 en dehors de  $D$ , et soit  $P$  un pavé contenant  $D$ . Alors

$$\int_{D(u,v)} f = \int_P \tilde{f} = \int_a^b \left( \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

**Remarque.** On pourra appliquer la formule (4.2), en particulier, pour calculer l'aire de  $D(u, v)$  (que l'on a noté  $\mu(D(u, v))$ ), en prenant le cas particulier  $f = 1$ .

**Remarque.** En intervertissant l'axe des  $x$  et  $y$ , on aurait définir, pour deux fonctions continues  $u \leq v$  l'ensemble

$$\tilde{D}(u, v) := \{(x, y) : u(y) \leq x \leq v(y)\}.$$

$\tilde{D}(u, v)$  est aussi quarrable et  $\int_{\tilde{D}(u, v)} f = \int_a^b \left( \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx \right) dy$ . Suivant le domaine considéré, il sera parfois préférable d'utiliser  $\tilde{D}(u, v)$  au lieu de  $D(u, v)$ .  $\square$

**Exemple.** Calculer l'aire d'un quart de disque de rayon  $R$ . Le domaine  $D$  est de la forme  $D(u, v)$  avec  $a = 0$ ,  $b = R$ ,  $u(x) = 0$  et  $v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Donc

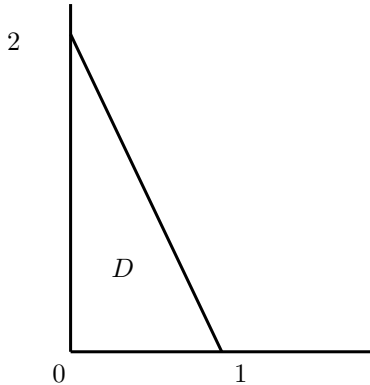
$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int_0^R \left( \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} 1 dy \right) dx \\ &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

On pose  $x = R \sin(t)$  ( $\frac{x}{R} \in [0, 1]$  donc le changement de variable est valide) ce qui donne

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)} R \cos(t) dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} \\ &= R^2 \left( \frac{\pi}{4} + \left[ \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \boxed{R^2 \frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

**Exemple.** Soit  $I = \int_D f$  où  $f(x, y) = xy$  et

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2 - 2x, x \geq 0\}.$$



Le domaine  $D$  est de la forme  $D(u, v)$  avec  $u(x) = 0$  et  $v(x) = 2 - 2x$  donc

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^1 \left( \int_0^{2-2x} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 x \frac{1}{2} (2 - 2x)^2 = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

## 4.2 Intégrale triple

La théorie de l'intégrale double vue précédemment se développe de façon identique aux dimensions supérieures, où les pavés de dimension 2 sont remplacés par des pavés de dimension  $n$  de type  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ .

Le théorème de Fubini reste valable, et une généralisation des domaines type  $D(u, v)$  est possible. Voici par exemple un énoncé en dimension 3 que l'on pourra utiliser pour calculer des volumes ou des intégrales triples de fonctions continues.

**Théorème 23.** Soient  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi, \psi : D(u, v) \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues. Alors la partie

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(u, v) \text{ et } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

est quarrable dans  $\mathbb{R}^3$  et si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, les fonctions

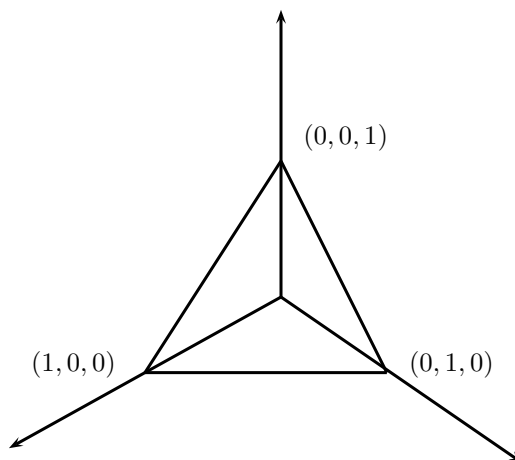
$$(x, y) \mapsto \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \quad \text{et}$$

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy$$

sont continues et on a

$$\int_F f = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

**Exemple.** Volume d'un prisme : Soit  $E \subset \mathbb{R}^3$  la partie délimitée par les plans de coordonnées et le plan  $\{x + y + z = 1\}$ .



La base est

$$D(u, v) = \{(x, y) : x \in [0, 1] \text{ et } 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

et  $0 \leq z \leq 1 - x - y$  pour  $(x, y) \in D(u, v)$ . D'où

$$\mu(E) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

### 4.3 Changement de variables

**Définition 30.** Soit  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts et  $f : U \rightarrow V$  une fonction  $C^1$ . Pour tout  $x \in U$  on note la matrice jacobienne de  $f$  au point  $x$  par  $Df(x)$ . On dit que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme si de plus

1.  $f : U \rightarrow V$  est bijective
2.  $\det(Df(x)) \neq 0$  pour tout  $x \in U$ .

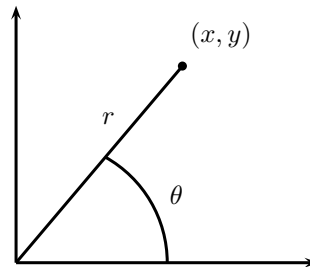
**Remarque.** l'assertion 2. ci dessus implique en réalité que si  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, alors  $f^{-1}$  est aussi de classe  $C^1$  (cela résulte du théorème d'inversion locale qui est hors de portée de ce cours).

**Théorème 24** (Changement de variables). soient  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts quarrables et  $\varphi : U \rightarrow V$  un  $C^1$ -difféomorphisme. Si  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, alors la fonction  $f(\varphi(x))|\det Df(x)|$  l'est aussi sur  $U$  et on a

$$\int_{\varphi(U)} f = \int_U f \circ \varphi |\det Df|.$$

#### 4.3.1 Intégrale double en coordonnées polaires

On souhaite paramétrer le plan  $\mathbb{R}^2$  par l'angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  et le rayon  $r > 0$  de la façon suivante.



Soit  $L$  la droite

$$L := \{(x, y) : x \geq 0 \text{ et } y = 0\}.$$

Alors  $\varphi : ]0, R[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow B(0, R) \setminus L$  définie par

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin(\theta))$$

est un  $C^1$ -difféomorphisme entre les ouverts  $]0, R[ \times ]0, 2\pi[$  et  $B(0, R) \setminus L(B(0, R))$  désigne la boule euclidienne ouverte de rayon  $R$  centrée en l'origine). On a

$$D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\det(D\varphi(r, \theta)) = r}.$$

On en déduit que pour toute fonction continue  $f : B(0, R) \setminus L \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R) \setminus L} f &= \int_{]0, R[ \times ]0, 2\pi[} f \circ \varphi | \det D\varphi| \\ &= \boxed{\int_0^{2\pi} \left( \int_0^R f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr \right) d\theta}. \end{aligned}$$

**Remarque.** En réalité la droite  $L$  a une aire nulle, c'est à dire  $\mu(L) = 0$  donc pour toute fonction continue on a

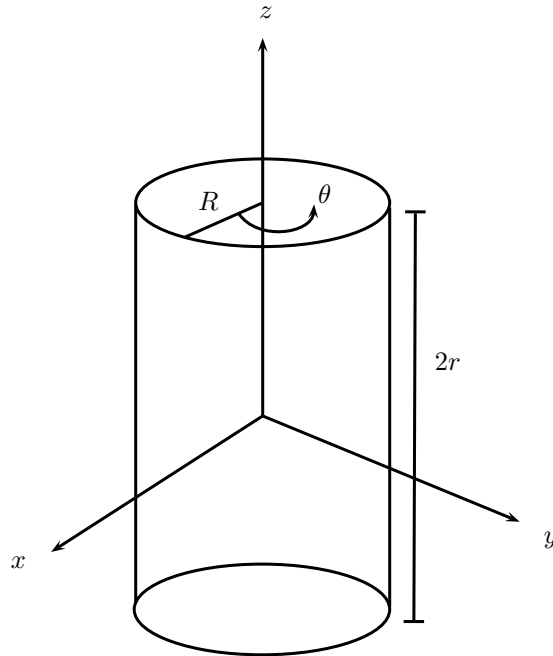
$$\int_{B(0, R) \setminus L} f = \int_{B(0, R)} f = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr \right) d\theta.$$

### 4.3.2 Intégrale triple en coordonnées cylindriques

Les réels  $R > 0$  et  $r > 0$  étant fixés on considère le cylindre

$$\mathcal{C} := \tilde{B}_2(0, R) \times ]-r, r[$$

où  $\tilde{B}_2(0, R) = B(0, R) \setminus L$  avec  $L$  la même droite que précédemment.



Soit

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z).$$

$\varphi : ]0, R[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-r, r[ \rightarrow \mathcal{C}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme et

$$D\varphi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\det D\varphi(\rho, \theta, z) = \rho.}$$

Pour toute fonction  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable on a donc

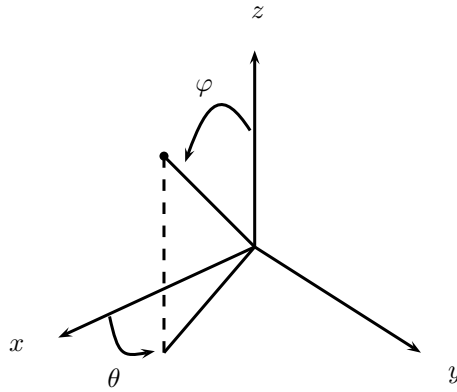
$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f = \int_{-r}^r \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho d\rho \right) d\theta \right) dz.}$$

### 4.3.3 Intégrale triple en coordonnées sphériques

On souhaite paramétrer la boule  $\mathbb{R}^3$  de la manière suivante :

$U = ]0, R[ \times ]-\pi, \pi[ \times ]0, \pi[$ ,  $V = B_3(0, R) \setminus \{x < 0 \text{ et } y = 0\}$ .

$$\psi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$



$$D\psi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

d'où

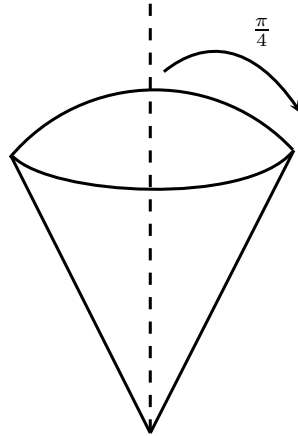
$$\boxed{\det D\psi(\rho, \theta, \varphi) = -\rho^2 \sin(\varphi)}$$

et

$$\boxed{\int_{B_3(0,R)} f = \int_0^\pi \left( \int_{-\pi}^\pi \left( \int_0^R f \circ \psi(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin(\varphi) d\rho \right) d\theta \right) d\varphi.}$$



**Exemple.** Calculer le volume d'un "cône de glace" d'ouverture  $\pi/4$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^2 \sin(\varphi) d\rho \right) d\theta \right) d\varphi = \boxed{\frac{2}{3}\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

# Chapitre 5

## Géométrie plane

### 5.1 Courbes paramétrées

**Définition 31** (courbe paramétrée). Une courbe paramétrée du plan est la donnée d'une application continue  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle. L'application  $\gamma$  est appelée paramétrisation de la courbe. L'image de  $\gamma$  notée  $\text{supp}(\gamma) = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$  est appelé support de la courbe. La courbe est dite de classe  $C^k$  si l'application  $\gamma$  est de classe  $C^k$ . La courbe est dite simple (ou injective) si  $\gamma$  est injective. Une courbe est dite régulière si elle est de classe  $C^1$  et si  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 32** (Changement de paramétrisation). Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de classe  $C^k$  et  $\theta : J \rightarrow I$  une bijection de classe  $C^k$ . Alors l'application  $\gamma' = \gamma \circ \theta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  a même image que  $\gamma$ . On dit que c'est une nouvelle paramétrisation de la courbe  $\gamma$ . De plus si l'application  $\theta$  est croissante on dit que  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont même sens d'orientation.

**Remarque** : Dans ce cours, une courbe sera toujours donnée par une paramétrisation. Cette paramétrisation définit un sens de parcours. Donc toutes les courbes considérées seront, implicitement, des courbes orientées : le sens de la courbe étant celui de la paramétrisation première qui définit la courbe.

#### Exemples

- La chaînette  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (2t, \cosh(t))$  est une courbe simple de classe  $C^\infty$ . L'application  $t \mapsto (\tan(2t), \cosh(\tan(t)))$  est une nouvelle paramétrisation de  $\gamma$ , ayant pour changement de paramétrisation l'application bijective  $\theta : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, \theta(t) = \tan(t)$ . Les deux paramétrisations ont le même sens.
- L'application  $t \mapsto (\cos(t), -\sin(t))$  est une paramétrisation du cercle en sens opposé à  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ . Ce sont deux courbes non injectives.

**Définition 33** (Paramétrisation cartésienne). *L'application  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation cartésienne s'il existe un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$  tel que la première coordonnée de  $\gamma(t)$  dans ce repère soit  $t$ . Autrement dit,  $\gamma$  est un graphe, dans un certain repère.*

### Exemples

- L'application  $t \mapsto (t, \cosh(t/2))$  est une paramétrisation cartésienne de la chaînette de l'exemple précédent.
- Le cercle  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  n'admet pas de paramétrisation cartésienne.

### 5.1.1 Longueur d'une courbe paramétrée

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe et soit  $\sigma = (t_1, \dots, t_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . A  $\sigma$  on associe la courbe polygonale inscrite dans  $\text{supp}(\gamma)$  de sommets  $(M_1, \dots, M_n)$  où  $M_i = \gamma(t_i)$ . La longueur de la courbe polygonale est

$$L_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} \|M_{i+1} - M_i\|.$$

Désignons par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$  et par

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} L_\sigma(\gamma).$$

**Définition 34.** *Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe. Si  $L(\gamma) < +\infty$  on dit que  $\gamma$  est rectifiable et on appelle  $L(\gamma)$  sa longueur.*

**Théorème 25.** *Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe de classe  $C^1$  alors elle est rectifiable et*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \tag{5.1}$$

*Démonstration.* Nous montrerons uniquement que les courbes  $C^1$  sont rectifiables et que  $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ . La preuve de l'autre inégalité résulte de l'uniforme continuité de  $\gamma'$  sur  $[a, b]$ , et sera admise dans ce cours.

Pour montrer l'inégalité, il suffit de prendre une subdivision quelconque et d'écrire

$$\begin{aligned} L_\sigma(\gamma) &= \sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(s)\| ds = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds, \end{aligned}$$

et un passage au sup en  $\sigma$  permet de conclure.  $\square$

### Exemple : calcul en coordonnées polaires

A chaque couple de  $(t \mapsto r(t), t \mapsto \theta(t))$  de fonctions  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  nous faisons correspondre la courbe

$$\gamma : t \mapsto (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t))).$$

Le vecteur dérivé  $\gamma'(t)$  est donné par

$$\gamma'(t) = (r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta', r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta')$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|^2 &= (r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta')^2 + (r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta')^2 \\ &= (r')^2 + (r'\theta')^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ans,si,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r'(t)\theta'(t)^2}$$

**Remarque** : bien que cela n'est pas grand sens dans ce cours, on peut écrire symboliquement que la métrique (au sens riemannien) de la courbe est définie en coordonnées polaires par

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

et en coordonnées cartésiennes orthonormales par

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

### 5.1.2 Paramétrisation normale

**Définition 35.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de classe  $C^1$ . On dit que  $\gamma$  est une paramétrisation normale, ou encore, est paramétrée par longueur d'arc, si

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I.$$

**Théorème 26.** Toute courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  régulière admet une paramétrisation normale ayant même sens de parcours.

*Démonstration.* Posons  $L = L(\gamma)$ . Puisque  $\gamma$  est  $C^1$  sur  $[a, b]$  on a  $L(\gamma) < +\infty$  et

$$\theta(s) = \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt.$$

Alors par hypothèse  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  pour tout  $t$  donc  $\theta : [a, b] \rightarrow [0, L]$  est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de  $[a, b]$  vers  $[0, L]$ . En outre  $\theta$  est clairement  $C^1$ , sa dérivée au point  $s$  étant  $\|\gamma'(s)\|$ , ne s'annule pas. Posons

$$g(t) = \gamma \circ \theta^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

De la relation  $\theta^{-1} \circ \theta(t) = t$  on en déduit que

$$(\theta^{-1})'(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = 1,$$

d'où

$$(\theta^{-1})'(\theta(t)) = \frac{1}{\theta'(t)}$$

donc  $\theta^{-1}$  est aussi de classe  $C^1$  (donc  $g$  est de classe  $C^1$ ) et pour tout  $t \in [0, L]$  on a

$$(\theta^{-1})'(t) = \frac{1}{\|\gamma'(\theta^{-1}(t))\|}.$$

Donc

$$g'(t) = \gamma'(\theta^{-1}(t)) \cdot (\theta^{-1})'(t) = \frac{\gamma'(\theta^{-1}(t))}{\|\gamma'(\theta^{-1}(t))\|}.$$

Par suite,  $\|g'(t)\| = 1$  et  $g$  est bien une paramétrisation normale.  $\square$

**Remarque** : Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe paramétrée par longueur d'arc et si  $M = f(s)$  est un point du support, le nombre  $s$  est appelé abscisse curviligne du point  $M$ , compté à partir de l'origine  $M_0 = f(a)$ .

### 5.1.3 Tangente, Courbure

**Définition 36.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc, de classe  $C^2$ .

- la fonction vectorielle  $\tau : t \mapsto \gamma'(t)$  est la fonction vecteur unitaire tangent. (En effet, si  $M = \gamma(s)$ , alors  $\gamma'(s)$  est un vecteur tangent au support de la courbe au point  $M$ , orienté dans le sens de parcours).
- la fonction  $\rho : t \mapsto \|\gamma''(t)\|$  est la fonction courbure. Si  $\|\gamma''(t)\| = 0$  on dit que  $\gamma(t)$  est un point d'inflexion.
- si  $\gamma$  n'admet pas de point d'inflexion, la fonction vectorielle  $\nu : t \mapsto \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$  est la normale principale de la courbe. Notons que ce vecteur ne dépend pas du sens du parcours de la courbe. De plus, la relation  $\|\gamma'(t)\|^2 = 1$  implique, par dérivation,  $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$ .

**Définition 37.** Soit  $M = \gamma(t)$  un point de la courbe  $\gamma$  qui n'est pas un point d'inflexion. Le nombre  $R(t) = 1/\rho(t)$  est appelé rayon de courbure et le point  $I$  défini par  $\vec{MI} = R(t)\nu(t)$  est appelé le centre de courbure de  $\gamma$  en  $M$ . Le cercle centré en  $I$  et de rayon  $R(t)$  est appelé cercle osculateur de  $\gamma$  au point  $M$ .

**Exemple** : Soit  $C$  le cercle de centré en  $(0, 0)$  de rayon  $R > 0$  paramétré par

$$\gamma(t) = (a \cos(t/a), a \sin(t/a)).$$

on a  $\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin(t/a), \cos(t/a))\| = 1$  donc  $\gamma$  est paramétré par longueur d'arc. Le vecteur unitaire tangent au point  $\gamma(t)$  est

$$\tau(t) = (-\sin(t/a), \cos(t/a)),$$

la courbure est  $\rho(t) = 1/a$ , le rayon de courbure est  $1/\rho = a$  et la normale principale est

$$\nu(t) = \tau'(t)/\|\tau'(t)\| = (-\cos(t/a), -\sin(t/a)),$$

c'est à dire la normale unitaire au cercle orientée vers le centre de courbure, qui est le centre du cercle (d'où son nom).

#### 5.1.4 Formules de Frenet

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc, de classe  $C^2$ . On a défini précédemment le vecteur unitaire tangent par

$$\tau(t) = \gamma'(t).$$

Désignons par  $\tau_1(t)$  le vecteur déduit de  $\tau(t)$  par rotation d'angle  $+\pi/2$ . On l'appellera, vecteur unitaire normal orienté.

**Définition 38.** *Le repère  $(\tau(t), \tau_1(t))$  est appelé repère de Frenet associé à la courbe  $\gamma$ .*

**Attention** : il ne faut pas confondre la normale orientée,  $\tau_1(t)$ , avec la normale principale  $\nu(t) = \gamma''(t)/\|\gamma''(t)\|$ . Les vecteurs  $\tau_1(t)$  et  $\gamma''(t)$  sont colinéaires. Il existe donc une fonction scalaire  $\alpha(t)$  telle que pour tout  $t$ ,

$$\gamma''(t) = \alpha(t)\tau_1(t).$$

Le nombre  $\alpha(t)$  est appelé courbure algébrique, et on a

$$|\alpha(t)| = \rho(t)$$

**Remarque importante 1.** *Si on change  $\gamma$  en une paramétrisation en sens opposé, le rayon de courbure, la courbure, le cercle osculateur et la normale principale sont inchangés (c'est à dire  $R(t), \rho(t), \nu(t)$ ), en revanche, la courbure algébrique est changée en son opposé, car elle dépend du repère de Frenet, qui lui même dépend de l'orientation choisie.*

**Exemple** : si on considère le même cercle que dans l'exemple précédent,

$$\gamma(t) = (a \cos(t/a), a \sin(t/a)),$$

la normale unitaire principale est

$$\nu(t) = (-\cos(t/a), -\sin(t/a)),$$

et le repère de Frenet est donné par

$$\tau(t) = (-\sin(t/a), \cos(t/a)) \quad \tau_1(t) = (-\cos(t/a), -\sin(t/a)).$$

Dans ce cas, on a  $\nu(t) = \tau_1(t)$ .

## 5.2 Formes différentielles de degré 1

### 5.2.1 Formes différentielles

Commençons par quelques rappels. On note  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$ . On dit aussi “formes linéaires” (et  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  s'appelle aussi l'“espace dual”).

Si  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et si  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , alors pour connaître  $f$  il suffit de connaître  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$ . En effet pour tout  $X = (x, y)$ , on a :

$$f(X) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2).$$

On en déduit que  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est de dimension 2. Plus précisément, soit  $dx \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $dy \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  les forme linéaires bien particulières définies par

$$dx(X) = x \text{ pour tout } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$dy(X) = y \text{ pour tout } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors  $(dx, dy)$  est une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  (on l'appelle “base duale”), et tout élément  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  s'écrit

$$f = adx + bdy$$

avec  $a = f(e_1) \in \mathbb{R}$  et  $b = f(e_2) \in \mathbb{R}$ .

**Définition 39.** Une forme différentielle de degré 1 sur  $U \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert) est une application  $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . En notant  $(dx, dy)$  la base duale il existe donc  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

On dit que  $f$  est de classe  $C^k$  si  $P$  et  $Q$  le sont.

### 5.2.2 Formes exactes, formes fermées

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^1$ , alors on a vu précédemment que sa différentielle  $df(x)$  calculée au point  $x \in \mathbb{R}^2$  était une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$ . Autrement dit, l'application  $x \mapsto df(x)$  est une forme différentielle, et on peut maintenant écrire

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Les formes différentielles de ce type sont appelées “exactes”.

**Définition 40** (Forme exacte). Soit  $\omega$  une forme différentielle continue de degré 1 sur  $U \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert). On dit que  $\omega$  est exacte sur  $U$  si il existe  $f$  de classe  $C^1$  sur  $U$  telle que  $\omega = df$ . On dit dans ce cas que  $f$  est une primitive de  $\omega$  sur  $U$ .

**Exemple** : Soit  $\omega$  la forme différentielle suivante :

$$\omega(x, y) = (2xy^3 + y \cos(xy))dx + (3x^2y^2 + x \cos(xy))dy.$$

Alors si  $\omega$  admet une primitive  $f$ , celle-ci doit vérifier

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = 2xy^3 + y \cos(xy)$$

c'est à dire  $f(x, y) = x^2y^3 + \sin(xy) + \varphi(y)$ . En dérivant maintenant cette expression en  $y$  et en identifiant avec le terme de  $\omega$  devant  $dy$  on trouve  $\varphi'(y) = 0$ . Donc  $\omega$  est exacte et admet pour primitive les fonctions du type

$$f(x, y) = x^2y^3 + \sin(xy) + C,$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante.

**Remarque** : si  $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$  est une forme différentielle exacte, alors le lemme de Schwarz implique  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Ceci amène la définition suivante.

**Définition 41** (Forme fermée). Soit  $\omega = Pdx + Qdy$  une forme différentielle de degré 1 sur  $U \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert), de classe  $C^1$ . On dit que  $\omega$  est fermée sur  $U$  si

$$\text{pour tout } X \in U, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(X) = \frac{\partial Q}{\partial x}(X).$$

La remarque précédente montre que

**Proposition 31.** Toute forme différentielle exacte est fermée.

La réciproque est un résultat célèbre dû à Poincaré, mais n'est vraie que pour des ouverts  $U$  bien particuliers ("simplement connexes"). Nous l'énoncerons dans le cas plus simple des ouverts étoilés.

**Définition 42.** Un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  est dit "étoilé" s'il existe  $X_0 \in U$  tel que pour tout  $X \in U$  on a  $[X_0, X] \subset U$ .

**Théorème 27** (de Poincaré). Toute forme différentielle fermée de classe  $C^1$  sur un ouvert étoilé  $U$ , est exacte.

*Démonstration.* Soit  $\omega = Pdx + Qdy$  une forme différentielle fermée de classe  $C^1$  sur un ouvert étoilé  $U$ . On peut sans perte de généralité supposer que  $U$  est étoilé par rapport à l'origine 0. Considérons l'application  $\varphi : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(X, t) \mapsto \omega(tX)(X) = P(tX)x + Q(tX)y.$$

L'ouvert  $U$  étant étoilé par rapport, à 0, l'application  $\varphi$  est bien définie. De plus l'application  $\varphi$  est  $C^1$  sur  $U \times [0, 1]$ .



Posons, pour tout  $X \in U$ ,

$$f(U) = \int_0^1 \varphi(X, t) dt.$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, cas compact, la fonction  $f$  est bien  $C^1$  sur  $U$ . De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi(X, t) dt = \int_0^1 tx \frac{\partial}{\partial x} P(tX) + P(tX) + ty \frac{\partial}{\partial x} Q(tX) dt$$

Or puisque  $\omega$  est fermée, on a

$$\begin{aligned} P(tX) + tx \frac{\partial}{\partial x} P(tX) + ty \frac{\partial}{\partial x} Q(tX) &= P(tX) + tx \frac{\partial}{\partial x} P(tX) + ty \frac{\partial}{\partial y} P(tX) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (tP(tX)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = P(X),$$

et de la même façon,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = Q(X).$$

La forme  $\omega$  est donc exacte. □

**Lien avec les champs de vecteurs** : un champ de vecteur dans  $\mathbb{R}^2$  est une application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (en tout point  $X \in \mathbb{R}^2$  on associe un vecteur  $\varphi(X) \in \mathbb{R}^2$ ). A tout champ de vecteur on peut associer une forme différentielle  $\omega_\varphi = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy$ . On dit que le champ de vecteur dérive d'un potentiel scalaire, si la forme différentielle  $\omega_\varphi$  est exacte. D'après le théorème de Poincaré, pour que le champ de vecteur  $\varphi$  dérive d'un potentiel, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ . Ceci se généralise en dimension 3 (non traité dans ce cours) qui amène la condition bien connue  $\text{rot}(\varphi) = 0$  pour que  $\varphi$  dérive d'un potentiel.

### 5.2.3 Intégrale curviligne

**Définition 43** (Intégrale curviligne). Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert et soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^1$  dont le support est contenu dans  $U$ . Si  $\omega$  une forme différentielle sur  $U$  on appelle intégrale curviligne de  $\omega$  le long de  $\gamma$  le réel

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt, \quad \text{noté } \int_\gamma \omega.$$

**Remarque** : On vérifie facilement que l'intégrale curviligne  $\int_\gamma \omega$  ne dépend pas du paramétrage choisi, de même sens que  $\gamma$ . On peut alors définir l'intégrale sur un arc géométrique orienté  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  que l'on note aussi  $\int_\Gamma \omega$ , qui vaut  $\int_\gamma \omega$  où  $\gamma$  est n'importe quel paramétrage de  $\Gamma$  orienté dans le bon sens.

**Exemple** : intégrer la forme différentielle  $\omega(x, y) = y^2 dx + x^2 dy$  sur l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} = 0$ , parcourue dans le sens trigonométrique. Il faut d'abord paramétrer la courbe, par exemple avec  $\gamma(t) = (a(1 + \cos(t)), b \sin(t))$  où  $t \in [0, 2\pi]$ . Calculons  $\gamma'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$  et donc

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = -ab^2 \sin^3(t) + a^2 b(1 + \cos(t))^2 \cos(t).$$

Donc

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_0^{2\pi} (-ab^2 \sin^3(t) + a^2 b(1 + \cos(t))^2 \cos(t)) dt = 2\pi a^2 b.$$

**Proposition 32** (Intégrale d'une forme exacte). *Si  $\omega$  est une forme exacte sur  $U \subset \mathbb{R}^2$  et si  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  est une courbe  $C^1$  dont le support est contenu dans  $U$  alors*

$$\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a),$$

où  $f$  est une primitive de  $\omega$  sur  $U$ . Ainsi, l'intégrale curviligne d'une forme exacte est indépendante de la courbe choisie, elle ne dépend que des extrémités de la courbe. En particulier, l'intégrale d'une courbe fermée est nulle.

*Démonstration.* On a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)' dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a).$$

□

**Définition 44** (Circulation d'un champ de vecteur). *Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  ouvert et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteur sur  $U$  de classe  $C^1$  et soit  $\gamma = [a, b] \rightarrow U$  une courbe de classe  $C^1$ . On appelle circulation du champ de vecteur  $\phi$  le long de  $\gamma$  l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma} \omega_{\phi}$$

où  $\omega_{\phi} = \phi_1 dx + \phi_2 dy$ .

**Interpretation** : la circulation du champ de vecteur  $\phi$  s'interprète comme un travail, une accumulation d'énergie, ou de potentiel, au cours du déplacement d'un mobile  $M(t)$  le long de la courbe. On peut imaginer qu'un mobile  $M(t)$  se déplace dans un espace où agit un champ de force : selon la direction de la vitesse du déplacement, le mobile est freiné ou poussé par le champ  $\phi$  au point  $M(t)$ . Pour aller de  $M(a)$  à  $M(b)$ , le déplacement représente un coût en énergie, comptabilisé par la circulation (car  $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \phi(M(t)), \gamma'(t) \rangle$ ). La proposition 32 indique que si le champ  $\phi$  dérive d'un potentiel, alors la circulation est égale à la différence des potentiels entre les points  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ .

### 5.2.4 Théorème de Green-Riemann

Le théorème suivante transforme une intégrale double en intégrale simple (“de bord”).

**Théorème 28** (Green-Riemann). *Soit  $K$  un compact simple du plan, bordé par une courbe simple  $\gamma$  de classe  $C^1$  par morceaux, orientée dans le sens direct (on notera ce contour  $\partial K^+$ ), et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $K$ . Soit  $\omega = Pdx + Qdy$  une forme différentielle de degré 1 sur  $U$ . On a alors*

$$\int_{\partial K^+} \omega = \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

**Exemple (calcul d’aire)** : Un cas particulier intéressant est celui du calcul de l’aire de  $K$ , en appliquant Green-Riemann à la forme différentielle  $xdy$  ou bien  $-ydx$ . Ainsi, on a

$$\mu(K) = \int_K 1 = \int_{\partial K^+} -ydx = \int_{\partial K^+} xdy = \frac{1}{2} \int_{\partial K^+} xdy - ydx$$

Par exemple pour calculer l’aire de l’ellipse  $E$  dont le bord est paramétré dans le sens positif par  $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$  sur  $[0, 2\pi]$  on trouve

$$\mu(E) = \int_E 1 = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = \int_0^{2\pi} ab \cos^2(t)dt = \pi ab.$$

**Exemple (formule de la divergence)** : Soit  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteur.

La divergence de  $\varphi$  est  $\operatorname{div} \varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$ . En appliquant Green-Riemann à la forme différentielle  $\omega = -\varphi_2 dx + \varphi_1 dy$  on trouve

$$\int_K \operatorname{div} \varphi = \int_{\partial K^+} \omega = \int_{\partial K^+} \langle \varphi, \nu \rangle,$$

où  $\nu$  est la normale sortante à  $K$ .

## 5.3 Application : preuve de l’inégalité isopérimétrique par Fourier

Nous terminons ce cours avec une belle application de tous les chapitres précédents, à savoir, l’inégalité isopérimétrique : à périmètre donné, c’est le cercle enferme la plus grande surface possible.

Il existe plusieurs démonstrations de cette inégalité. Celle présentée ici utilise les ingrédients suivants : séries de Fourier (inégalité de Parseval), inégalité de Cauchy-Schwarz (espaces euclidiens), théorème de Green-Riemann, (formes différentielles, intégrale double, théorème de Fubini, intégrale curviligne) et constitue ainsi un épilogue intéressant pour ce cours.

**Théorème 29.** Soit  $\Gamma$  une courbe fermée,  $C^1$ , régulière, de longueur donnée  $L$  et soit  $A$  l'aire du domaine qu'elle renferme. Alors

$$4\pi A \leq L^2$$

avec égalité si et seulement si  $\Gamma$  est un cercle.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\gamma}$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\Gamma$  et soit  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(Lt)$  de sorte que  $|\gamma'(t)| = L$  et  $\gamma$  est maintenant une paramétrisation de  $\Gamma$  sur  $[0, 1]$ . Quitte à translater  $\gamma$  par une constante on peut supposer que  $\int_{\Gamma} 1 = 0$ . Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  tels que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . On pose  $f = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par

$$f(t) = x(t) + iy(t).$$

Puisque  $\Gamma$  est une courbe fermée,  $f$  est 1-periodique. La formule de Green-Riemann (appliquée à la forme différentielle  $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ ) donne

$$2A = \int_0^1 yx'(t) - xy'(t) dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \overline{f'} &= \int_0^1 (xx' + yy') + i(x'y - xy') \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}[x^2 + y^2]_0^1}_{=0} + 2iA = 2iA \end{aligned}$$

(car  $f$  est 1-periodique).

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis Wirtinger,

$$\begin{aligned} 2A &= \left| \int_0^1 f(t) \overline{f'(t)} dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) \overline{f'(t)}| dt \leq \|f\| \|f'\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{2\pi} \end{aligned}$$

car  $|f'| = L$ . D'où

$$\boxed{4\pi A = L^2}.$$

□