

Notes de cours Masterclass niveau M1 - Introduction à la  
théorie de la mesure géométrique et au calcul des variations

Antoine Lemenant

12 décembre 2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Séance de cours 1 : Existence pour le problème de Plateau 1D</b>	<b>4</b>
2.1	Mesures de Haurdorff . . . . .	4
2.1.1	Définition et premières propriétés . . . . .	4
2.1.2	Borne sur le nombre de point d'intersection avec un cercle . . . . .	5
2.1.3	Lemme de recouvrement de Vitali . . . . .	6
2.1.4	Densité et mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ . . . . .	6
2.2	Propriété des compacts connexes . . . . .	7
2.3	Une démonstration du théorème de Gołab . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Séance de cours 2 : Régularité pour les ensembles presque minimaux 1D</b>	<b>10</b>
3.1	Un critère de régularité $C^1$ pour les ensembles . . . . .	10
3.1.1	Régularité des ensembles presque minimaux connexes dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	13
3.1.2	L'estimation de la hauteur . . . . .	14
3.1.3	Démonstration du Théorème 3.2 . . . . .	15
3.2	Limites par dilatation et minimiseurs globaux . . . . .	17
3.2.1	Monotonie de la densité . . . . .	17
3.2.2	Classification des limites par dilatation des ensembles presque minimaux 1D	18
3.3	Démonstration du théorème 3.1 . . . . .	19

# Prélude

Ce document résume les 3h de cours (avec des détails supplémentaires) délivrés à la MASTER-CLASS M1 de janvier 2025 à l'IECL (Université de Lorraine, Nancy).

*Pour toute remarque veuillez m'écrire à [antoine.lemenant@univ-lorraine.fr](mailto:antoine.lemenant@univ-lorraine.fr)*

# Chapitre 1

## Introduction

Le “calcul des variations” en mathématiques tire son origine de toute une classe de problèmes où l’on cherche à minimiser une fonctionnelle  $u \mapsto \mathcal{F}(u)$ . Notamment de part le “principe du moindre effort” en physique, on observe souvent dans la nature qu’un système physique tend à minimiser une énergie pour retrouver son état d’équilibre. Un exemple emblématique est donné par les films de savons, qui cherchent à minimiser la tension superficielle ce qui a donné lieu au célèbre problème de Plateau.

Ce dernier problème est à l’origine de la “théorie de la mesure géométrique”, qui est un champ des mathématiques qui donne un cadre rigoureux pour énoncer le problème de Plateau, i.e. minimiser l’aire d’un ensemble bordé par une courbe donnée. Nous allons voir dans ce cours une instance simplifiée de ce problème : le cas de la dimension 1.

# Chapitre 2

## Séance de cours 1 : Existence pour le problème de Plateau 1D

### 2.1 Mesures de Haurdorff

#### 2.1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1.** Pour toute partie  $K \subset \mathbb{R}^2$ , on définit

$$\mathcal{H}^1(K) := \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^1(K)$$

avec

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(K) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i) \right\},$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements au plus dénombrables  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  de fermés  $A_i$  tels que  $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  et  $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ .

Voici quelques propriétés élémentaires (admisses) à propos de  $\mathcal{H}^1$ .

**Proposition 1.**

1.  $K \mapsto \mathcal{H}^1(K)$  est une mesure sur les Boréliens de  $\mathbb{R}^2$ .
2. La mesure  $\mathcal{H}^1$  restreinte à un intervalle n'est autre que la mesure de Lebesgue sur cet intervalle.
3. La mesure  $\mathcal{H}^1$  généralise la "longueur", dans le sens où si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe **injective** de classe  $C^1$  alors

$$\mathcal{H}^1(\gamma([0, 1])) = \int_{[0, 1]} |\gamma'(t)| dt.$$

4. Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application Lipschitzienne alors pour tout  $E$  on a :

$$\mathcal{H}^1(f(E)) \leq \text{Lip}(f) \mathcal{H}^1(E).$$

*Démonstration.* Admise (voir par exemple le livre de Mattila [5]).

□

### 2.1.2 Borne sur le nombre de point d'intersection avec un cercle

**Lemme 1.** (*Inégalité de Eilenberg*) Soit  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Alors pour tout  $0 < s < r$  et  $x \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\int_s^r \#(K \cap \partial B(x_0, t)) dt \leq \mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r) \setminus B(x_0, s)), \quad (2.1)$$

où  $\#A$  est le nombre de points si l'ensemble  $A$  est fini, et  $+\infty$  sinon.

*Démonstration.* Posons  $E = K \cap B(x_0, r) \setminus B(x_0, s)$ . Par définition de  $\mathcal{H}^1$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  il existe des ensembles fermés  $E_{k,1}, E_{k,2}, \dots$  tels que  $\text{diam}(E_{k,j}) \leq 1/k$  et

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} \text{diam}(E_{k,j}) \leq \mathcal{H}^1(E) + \frac{1}{k}.$$

On définit ensuite

$$F_{k,j} := \{t \in \mathbb{R}^+ : E \cap E_{k,j} \cap \partial B(x_0, t) \neq \emptyset\}.$$

Comme pour tout  $k$ , les  $E_{k,j}$  recouvrent  $E$ , il est clair que

$$\#(E \cap \partial B(x_0, t)) \leq \lim_{k \rightarrow 0} \#\{j : E_{k,j} \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset\}.$$

Par ailleurs, si  $t, t' \in F_{k,j}$  alors il existe  $u, v \in E \cap E_{k,j}$  tel que  $|u| = t$  et  $|v| = t'$ . Alors

$$|t - t'| \leq ||u| - |v|| \leq |u - v| \leq \text{diam}(E_{k,j}),$$

d'où

$$\text{diam}(F_{k,j}) \leq \text{diam}(E_{k,j}) \leq 1/k,$$

et  $\mathcal{L}^1(F_{k,j}) \leq \text{diam}(E_{k,j})$ . D'après Fatou on trouve :

$$\begin{aligned} \int_s^r \#(E \cap \partial B(x_0, t)) dt &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \#\{j : E_{k,j} \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset\} dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\{j : E_{k,j} \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset\}} 1 dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_j \int_{F_{k,j}} 1 dt \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_j |F_{k,j}| \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_j \text{diam}(E_{k,j}) = \mathcal{H}^1(E), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

**Remarque 1.** La mesurabilité de  $t \mapsto \#(K \cap \partial B(x_0, t))$  n'est pas évidente à démontrer en général. Mais elle est vraie si  $K$  est suffisamment régulier (par exemple si  $K$  est un compact connexe tel que  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ ). Nous avons préféré éluder ce problème ici.

**Remarque 2.** On déduit en particulier de la formule d'Eilenberg que le cardinal  $\#(K \cap \partial B(x_0, t))$  est fini pour presque tout  $t$  dès lors que  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ .

En réalité on peut montrer le résultat plus précis suivant :

**Lemme 2.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble compact connexe tel que  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ . Alors pour tout  $0 < s < r$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\int_s^r \#(K \cap \partial B(x_0, t)) dt = \int_{K \cap B(x_0, r) \setminus B(x_0, s)} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \tau(x) \right| d\mathcal{H}^1, \quad (2.2)$$

où  $\tau(x)$  est un vecteur tangent à  $K$  au point  $x$ , qui existe  $\mathcal{H}^1$ -presque partout.

*Démonstration.* En appliquant la formule de l'aire [2, Theorem 2.91] à l'ensemble  $\mathcal{H}^1$ -rectifiable  $E := K \cap B(x_0, r) \setminus B(x_0, s)$  avec la fonction Lipschitzienne  $f : x \mapsto |x|$  on trouve

$$\int_s^r \#(K \cap \partial B(x_0, t)) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(t)) dt = \int_E \mathbf{J}d^E f d\mathcal{H}^1,$$

où, pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x$  dans  $E$ ,  $\mathbf{J}d^E f(x)$  désigne le facteur d'aire associée à la différentielle tangente  $df^E$  (voir [2]). Comme  $E$  admet un vecteur tangent  $\tau$  en  $\mathcal{H}^1$ -presque tout point, on en déduit que

$$\mathbf{J}d^E f_x = \left| \frac{x}{|x|} \cdot \tau \right| \quad \mathcal{H}^1\text{-p.p sur } E,$$

ce qui donne la formule (2.2). □

### 2.1.3 Lemme de recouvrement de Vitali

Dans l'étude des mesures de Hausdorff, le lemme technique suivant est souvent utile.

**Lemme 3.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $A \subset \mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées d'intérieur non vides. On suppose que pour tout  $x \in A$ ,

$$\inf_{B(x,r) \in \mathcal{F}} r = 0.$$

Alors il existe une sous-famille au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  telle que

1. les boules de  $\mathcal{G}$  sont 2 à 2 disjointes
2.  $\mu(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0$ .

*Démonstration.* Voir par exemple Proposition 1.95 dans [6]. □

### 2.1.4 Densité et mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^1$

**Lemme 4.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $A \subset \mathbb{R}^N$  un Borelien tel que

$$\forall x \in A, \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{2r} \geq 1. \quad (2.3)$$

Alors

$$\mu(A) \geq \mathcal{H}^1(A).$$

*Démonstration.* Soit  $\delta > 0$  fixé et  $\varepsilon > 0$  fixé. Soit

$$\mathcal{F} := \left\{ B(x, r) \mid x \in A, 2r \leq \delta, \quad \text{et} \quad \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{2r} \geq 1 - \varepsilon \right\}.$$

Grace à (2.3) on sait que

$$\forall x \in A, \quad \inf_{\overline{B}(x,r) \in \mathcal{F}} r = 0.$$

On peut donc appliquer le lemme de Vitali qui nous donne une sous-famille disjointe et au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  qui recouvre encore  $A$ . Comme les diamètres sont plus petits que  $2\delta$  on en déduit par définition de  $\mathcal{H}_\delta^1$  que

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \text{diam}(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \frac{\mu(B)}{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \mu(A).$$

Enfin, comme  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  sont arbitraires on conclut

$$\mathcal{H}^1(A) \leq \mu(A),$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 3.** *Un énoncé analogue reste vrai avec une estimation de densité inférieure, aboutissant à une inégalité dans l'autre sens mais elle est légèrement plus délicate à démontrer. Aussi, l'énoncé reste vrai pour les mesures  $H^k$  de dimension supérieure.*

## 2.2 Propriété des compacts connexes

**Définition 2** (Distance de Hausdorff). *Etant donnés deux compacts  $K, K' \subset \mathbb{R}^2$  on définit la distance de Hausdorff :*

$$d_H(K, K') := \max \left\{ \sup_{x \in K'} \text{dist}(x, K) \quad , \quad \sup_{x \in K} \text{dist}(x, K') \right\}.$$

**Proposition 2** (Principe de Blaschke). *Si  $A \subset \mathbb{R}^2$  est compact et  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de compacts de  $A$ , alors on peut trouver un compact  $K \subset A$  et une suite extraite telle que  $K_{n_k} \rightarrow K$  pour la distance  $d_H$ . De plus, si  $K_n$  est connexe pour tout  $n$  alors  $K$  est également connexe.*

*Démonstration.* On considère la suite de fonctions  $f_n : x \mapsto d_{K_n}(x) = \text{dist}(x, K_n)$  qui sont toutes 1-Lipschitz sur  $A$ , donc uniformément bornées et équicontinues. D'après le théorème d'Ascoli on peut extraire une sous-suite  $f_{n_k}$  qui converge uniformément vers une fonction  $f$ . En notant  $K = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ , compact de  $A$ , on peut montrer facilement que la convergence uniforme des  $f_{n_k}$  entraîne la convergence Hausdorff de  $K_{n_k}$  vers  $K$ . Montrons que  $K$  est connexe. En effet, sinon on pourrait écrire  $K = U_1 \cup U_2$  avec  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts disjoints non vides. Mais pour  $n$  assez grand  $K_n$  se trouve dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $K$ , c'est à dire que  $K_n \subset (U_1)_\varepsilon \cup (U_2)_\varepsilon$  et si  $\varepsilon < \text{dist}(U_1, U_2)$  on contredit le fait que  $K_n$  est connexe.  $\square$

**Proposition 3.** *Si  $K \subset \mathbb{R}^2$  est compact connexe et  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ , alors il existe une application Lipschitzienne  $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$  telle que  $|\gamma'(t)| \leq 2\mathcal{H}^1(K)$  et  $K = \gamma([0, 1])$ .*

*Démonstration.* La preuve est un peu longue et on peut la trouver par exemple dans [7, Proposition 6.21]. Une autre référence possible est [3, Proposition 1 chapitre 30 page 186] avec une preuve plus simple, mais où le résultat est moins fort car il donne uniquement  $|\gamma'(t)| \leq C\mathcal{H}^1(K)$  (ce qui est suffisant aussi pour la suite). En réalité on a  $|\gamma'(t)| = 2\mathcal{H}^1(K)$  c'est à dire que la courbe passe exactement 2 fois partout, mais la démonstration de ce point est délicate. On peut la trouver dans l'article [1].  $\square$

Le corollaire utile suivant découle immédiatement de la proposition précédente.

**Corollaire 1.** Si  $K \subset \mathbb{R}^2$  est compact connexe et  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ , alors

1.  $K$  est connexe par arcs.
2.  $K$  admet une tangente  $\mathcal{H}^1$ -presque partout.
3. pour tout  $x \in K$  et  $r < \text{diam}(K)$  on a  $\mathcal{H}^1(B(x, r)) \geq r$ .

## 2.3 Une démonstration du théorème de Gołab

Voici maintenant l'énoncé du résultat principal de ce premier cours.

**Théorème 2.1.** Si  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $K$  sont des compacts connexes de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $K_n \rightarrow K$  pour la distance de Hausdorff, alors

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf \mathcal{H}^1(K_n).$$

*Démonstration du Théorème 2.1.* Il existe plusieurs démonstrations possibles. Nous allons en voir une assez efficace qui se fait en 2 étapes, tirée du livre de Filippo Santambrogio [7]. On peut supposer sans perte de généralité que  $\liminf \mathcal{H}^1(K_n) < +\infty$  sinon il n'y a rien à démontrer. On peut aussi supposer quitte à extraire une sous suite que la liminf est en réalité une vraie limite. Pour rappel on sait déjà que  $K$  est compact connexe car il est la limite Hausdorff de compacts connexes.

On considère la suite des mesures de Radon  $\mu_n$  définies par  $\mu_n = \mathcal{H}^1|_{K_n}$ . Ce point de vue est au coeur de la théorie géométrique de la mesure, c'est à dire que l'on identifie les surfaces, ou ici des ensembles  $K$  avec la mesure  $\mathcal{H}^1|_K$ .

Puisque  $\sup_n \mu_n(\mathbb{R}^N) < \infty$ , il existe une sous suite (notée toujours par  $n$ ) telle que  $\mu_n$  converge faiblement vers  $\mu$ , et  $\mu(\mathbb{R}^N) \leq L$  car

$$\mu(\mathbb{R}^N) \leq \liminf_n \mu_n(\mathbb{R}^N) = L.$$

[Rappel : si  $\mu_n$  converge faible-\* vers  $\mu$  alors  $\mu(A) \leq \liminf \mu_n(A)$  pour  $A$  ouvert, et  $\mu(A) \geq \limsup \mu_n(A)$  pour  $A$  fermé]

**Etape 1.** Montrons que  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ . Pour cela on va utiliser le Lemme 4 et on cherche donc à estimer la densité de  $\mu$ . Soit  $x \in K$  et  $r < \text{diam}(K)/2$ . Par convergence Hausdorff de  $K_n$  on peut trouver  $x_n \in K_n$  et  $r' < r$  tel que  $x_n \rightarrow x$  et  $B(x_n, r') \subset B(x, r)$ . Puisque  $K_n$  est connexe et que son diamètre est nécessairement plus grand que  $r'$  pour  $n$  grand, on en déduit par le Corollaire 1, 3. que

$$\mu_n(\overline{B}(x, r)) \geq \mu_n(B(x_n, r')) \geq r'.$$

En prenant d'abord la limite en  $n$  puis la limite  $r' \rightarrow r$  on aboutit à

$$\mu(\overline{B}(x, r)) \geq r.$$

Ceci montre que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{2r} \geq \frac{1}{2}$$

et donc par le Lemme 4,

$$\mathcal{H}^1(K) \leq 2\mu(K) \leq 2L. \tag{2.4}$$

Ceci démontre le théorème, mais avec un facteur 2 en trop.

**Etape 2.** Maintenant que l'on sait que  $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ , on va pouvoir améliorer l'inégalité obtenue en (2.5) en montrant la même chose avec facteur 1. Pour cela on utilise le corollaire 1 qui nous dit que  $K$  possède une tangente  $\mathcal{H}^1$ -presque partout.

Plus précisément, soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$  et  $x \in K$  de la forme  $x = \gamma(t_0)$  un point de dérivabilité de  $\gamma$ , et tel que  $\gamma' \neq 0$ . L'ensemble des points de  $K$  où ceci n'est pas vérifié est de mesure  $\mathcal{H}^1$ -nulle. On peut supposer que  $x = 0$  et que  $\gamma'(t_0) = \mathbf{e}_1$ . On se fixe un  $N > 0$  assez grand et on définit  $x_k = \gamma(t_0 + \frac{k}{N})$ . Comme  $\gamma$  est dérivable on sait que  $x_k \in B(\frac{k}{N}re_1, r\varepsilon(r))$  pour tout  $k$ . Par ailleurs pour  $n$  assez grand on sait que  $K_n$  intersecte toutes les boules  $B(\frac{k}{N}re_1, r\varepsilon(r))$  et on peut en déduire en utilisant la connexité de  $K_n$  (voir le lemme 5 ci-dessous) que :

$$\mu(\overline{B}(x, r)) \geq 2r(1 - \frac{1}{N} - r\varepsilon(r)).$$

Ceci montre que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{2r} \geq 1 - \frac{1}{N},$$

puis en faisant  $N \rightarrow +\infty$  et en utilisant le Lemme 4 on en déduit que

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \mu(K) \leq L, \tag{2.5}$$

ce qui démontre le théorème. □

Dans la démonstration précédente nous avons utilisé le lemme technique suivant que nous admettons dans ces notes (pour une démonstration, voir [7]).

**Lemme 5** ([7] Lemma 6.22). *Si  $K$  et un compact connexe tel que pour tout  $k$ ,  $K \cap B(\frac{k}{N}re_1, r\varepsilon) \neq \emptyset$  alors*

$$\mathcal{H}^1(\overline{B}(x, r)) \geq 2r(1 - \frac{1}{N} - r\varepsilon).$$

En s'inspirant du théorème précédent nous pouvons démontrer une variante où la longueur est pondérée par un poids.

**Théorème 2.2.** *Soit  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne telle que  $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \omega(x) > 0$ . Si  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $K$  sont des compacts connexes tels que  $K_n \rightarrow K$  pour la distance de Hausdorff alors*

$$\int_K \omega(x) d\mathcal{H}^1(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{K_n} \omega(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Comme conséquence nous pouvons démontrer l'existence du problème de Steiner à poids.

**Corollaire 2** (Existence pour le problème de Plateau 1D). *Soit  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne telle que  $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \omega(x) > 0$  et soit  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$  des points quelconques. Alors il existe un minimum pour le problème*

$$\min \left\{ \int_K \omega(x) d\mathcal{H}^1(x) \quad : \quad K \text{ compact connexe contenant } \{x_1, \dots, x_N\} \right\}.$$

**Remarque 4.** *Dans le cas où  $\omega = 1$  il s'agit du problème de Steiner. Et dans le cas où  $N = 2$  on montre ainsi l'existence de géodésique (plus court chemin reliant deux points).*

**Remarque 5.** *L'hypothèse  $\omega$  Lipschitz est un peu restrictive mais rend la démonstration plus facile. En réalité le théorème reste vrai avec  $\omega$  seulement continue. Pour une démonstration on peut lire l'article [4] mais le contexte est un espace de Banach général (y compris de dimension infinie) à la place de  $\mathbb{R}^2$  comme ici dans ces notes, ce qui rend les choses beaucoup plus difficiles.*

# Chapitre 3

## Séance de cours 2 : Régularité pour les ensembles presque minimaux 1D

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème de régularité suivant.

**Théorème 3.1.** *Soit  $K$  un minimiseur pour le problème de Steiner à poids Lipschitz considéré dans le Corollaire 2. Alors  $K$  est l'union finie de courbes  $C^1$  se joignant au plus par 3 en formant des angles de 120 degrés.*

### 3.1 Un critère de régularité $C^1$ pour les ensembles

Pour tout ensemble fermé  $K \subset \mathbb{R}^2$  on définit la “flatness” (planéité)

$$\beta_K(x, r) := \inf_{L \ni x} d_H(K \cap \overline{B}(x, r), L \cap \overline{B}(x, r))$$

où le minimum est pris sur toutes les droites  $L \subset \mathbb{R}^2$  qui contiennent  $x$ . On utilisera parfois la notation  $\beta(x, r)$  au lieu de  $\beta_K(x, r)$ .

**Lemme 6.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble fermé contenant l'origine et satisfaisant, pour certaines constantes  $C, r_0, \alpha > 0$ ,*

$$\beta_K(x, r) \leq Cr^\alpha \quad \forall x \in K \cap B(0, 1) \text{ et } r \leq r_0.$$

*Alors, il existe un  $a \in (0, 1)$  dépendant uniquement de  $C, r_0$  et  $\alpha$  tel que  $K \cap B(0, a)$  soit à la fois un graphe  $10^{-2}$ -Lipschitz et une courbe régulière  $C^{1, \alpha}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in K \cap B(0, 1)$  et  $0 < r \leq r_0$ , désignons comme d'habitude par  $L(x, r)$  une droite affine qui approxime  $K \cap B(x, r)$ , c'est-à-dire telle que

$$\max \left\{ \sup_{z \in K \cap \overline{B}(x, r)} \text{dist}(z, L(x, r)), \sup_{z \in L(x, r) \cap \overline{B}(x, r)} \text{dist}(z, K) \right\} \leq \beta(x, r)r \leq Cr^{1+\alpha}. \quad (3.1)$$

De plus, désignons par  $\tau(x, r) \in \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\}$  un vecteur unitaire non orienté qui est tangent à  $L(x, r)$ , défini modulo  $\pm 1$ . Pour  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\}$ , utilisons par exemple la distance complète

$$d_S(\tau_1, \tau_2) := \min(|\tau_1 - \tau_2|, |\tau_1 + \tau_2|).$$

Nous démontrerons le lemme en 4 étapes.

*Étape 1. Existence de tangentes.* Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $r_k := 2^{-k}r_0$ . Nous affirmons que  $\tau(x, r_k)$  converge vers un vecteur  $\tau(x)$  en  $x$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . À cette fin, nous prouvons d'abord que pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $x \in K \cap B(0, 1)$ , nous avons

$$d_S(\tau(x, r_{k+1}), \tau(x, r_k)) \leq 9Cr_k^\alpha.$$

En effet, soit  $z := x + \tau(x, r_{k+1})r_{k+1} \in L(x, r_{k+1})$ . Grâce à (3.1), nous savons qu'il existe  $y \in K \cap \overline{B}(x, r_{k+1})$  tel que  $|z - y| \leq Cr_{k+1}^{1+\alpha}$  et en particulier,

$$r_{k+1} - Cr_{k+1}^{1+\alpha} \leq |y - x| \leq r_{k+1}. \quad (3.2)$$

Ensuite, en notant  $v := \frac{y-x}{|y-x|}$ , nous avons

$$\begin{aligned} d_S(v, \tau(x, r_{k+1})) \leq |v - \tau(x, r_{k+1})| &= \left| \frac{y-x}{|y-x|} - \frac{z-x}{r_{k+1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{y-x}{|y-x|} - \frac{y-x}{r_{k+1}} \right| + \frac{1}{r_{k+1}}|z-y| \\ &\leq \frac{|r_{k+1} - |y-x||}{r_{k+1}} + Cr_{k+1}^\alpha \\ &\leq 2Cr_{k+1}^\alpha, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où nous avons également utilisé (3.2) pour obtenir la dernière inégalité.

Mais alors, de manière similaire, comme  $y \in B(x, r_k)$ , il existe  $z' \in L(x, r_k)$  tel que  $|y - z'| \leq Cr_k^{1+\alpha}$ . En utilisant encore (3.2), nous pouvons estimer

$$|z' - x| \leq |y - x| + |z' - y| \leq r_{k+1} + Cr_k^{1+\alpha}$$

et

$$|z' - x| \geq |y - x| - |z' - y| \geq r_{k+1} - Cr_{k+1}^{1+\alpha} - Cr_k^{1+\alpha} \geq r_{k+1} - 2Cr_k^{1+\alpha},$$

ainsi, un calcul similaire à celui de (3.3) conduit à

$$\begin{aligned} d_S(v, \tau(x, r_k)) \leq |v - \frac{z'-x}{|z'-x|}| &= \left| \frac{y-x}{|y-x|} - \frac{z'-x}{r_{k+1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{y-x}{|y-x|} - \frac{y-x}{r_{k+1}} \right| + \left| \frac{y-x}{r_{k+1}} - \frac{z'-x}{r_{k+1}} \right| + \left| \frac{z'-x}{|z'-x|} - \frac{z'-x}{r_{k+1}} \right|. \\ &\leq Cr_{k+1}^\alpha + C\frac{r_k^{1+\alpha}}{r_{k+1}} + 2C\frac{r_k^{1+\alpha}}{r_{k+1}} \leq 7Cr_k^\alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En regroupant les deux inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$d_S(\tau(x, r_k), \tau(x, r_{k+1})) \leq d_S(\tau(x, r_k), v) + d_S(v, \tau(x, r_{k+1})) \leq 9Cr_k^\alpha = 9Cr_0^\alpha 2^{-k\alpha},$$

comme annoncé. Il s'ensuit que pour tous  $k, l \geq k_0$ ,

$$d_S(\tau(x, r_k), \tau(x, r_l)) \leq \sum_{i=k_0}^{+\infty} 9Cr_0^\alpha 2^{-i\alpha} = 2^{-k_0\alpha} \left( \frac{9Cr_0^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} \right).$$

Comme cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que désirée, à condition que  $k_0$  soit suffisamment grand, nous déduisons que  $\tau(x, r_k)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$ . Elle

converge donc vers un certain vecteur, que nous notons  $\tau(x)$ , pour tout  $x \in K \cap B(0, 1)$ . En particulier, en laissant  $l \rightarrow +\infty$ , nous obtenons l'estimation suivante, pour tout  $k \geq 0$  :

$$d_S(\tau(x, r_k), \tau(x)) \leq C' r_k^\alpha,$$

où

$$C' := \left( \frac{9C}{1 - 2^{-\alpha}} \right).$$

De plus, il est facile de voir, à partir de l'estimation de la distance (3.1), que  $x + \mathbb{R}\tau(x)$  est une droite tangente à l'ensemble  $K$  au point  $x$ . *Étape 2. Estimation Höldérienne des tangentes.* Nous

allons maintenant démontrer que l'application  $x \mapsto \tau(x)$  est Höldérienne. Soient  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $K \cap B(0, 1)$  et posons  $\rho := |y - x|$ . Supposons d'abord que  $\rho \leq r_0/4$  et soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$r_{k+2} \leq \rho \leq r_{k+1}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} d_S(\tau(x), \tau(y)) &\leq d_S(\tau(x), \tau(x, r_k)) + d_S(\tau(x, r_k), \tau(y, r_k)) + d_S(\tau(y, r_k), \tau(y)) \\ &\leq 2C' r_k^\alpha + d_S(\tau(x, r_k), \tau(y, r_k)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pour estimer  $d_S(\tau(x, r_k), \tau(y, r_k))$ , remarquons que  $y \in B(x, r_k)$ , donc il existe  $z \in P(x, r_k)$  tel que  $|y - z| \leq C r_k^{1+\alpha}$ . Notons  $v := \frac{y-x}{|y-x|}$ . Par un calcul très similaire à celui de (3.3) ou (3.4) ci-dessus, nous obtenons

$$d_S(v, \tau(x, r_k)) \leq 2C r_k^\alpha.$$

En inversant les rôles de  $x$  et  $y$ , nous avons également

$$d_S(v, \tau(y, r_k)) \leq 2C r_k^\alpha,$$

ce qui permet de déduire, en revenant à (3.5), que

$$d_S(\tau(x), \tau(y)) \leq 2C' r_k^\alpha + 2C r_k^\alpha \leq 2(C' + C) 2^{2\alpha} r_{k+2}^\alpha \leq 2(C' + C) 2^{2\alpha} |x - y|^\alpha. \quad (3.6)$$

Dans le cas où  $\rho \geq r_0/4$ , nous pouvons simplement estimer

$$d_S(\tau(x), \tau(y)) \leq 2 \leq 2 \frac{4^\alpha}{r_0^\alpha} |x - y|^\alpha,$$

ce qui conduit finalement, pour des  $x, y \in K \cap B(0, 1)$  quelconques, à

$$d_S(\tau(x), \tau(y)) \leq C'' |x - y|^\alpha, \quad (3.7)$$

avec  $C'' := \max(24^\alpha r_0^{-\alpha}, 2(C' + C) 2^{2\alpha})$ .

En d'autres termes, nous avons démontré que  $K$  admet une tangente en tout point de  $B(0, 1)$  et que les droites tangentes se comportent bien. Nous allons maintenant montrer que  $K \cap B(0, a)$  est une courbe pour  $a$  suffisamment petit. En fait, une façon commode de prouver ce fait est de montrer la propriété plus forte suivante : pour un certain  $a \in (0, 1)$  suffisamment petit,  $K \cap B(0, a)$  est un graphe lipschitzien.

*Étape 3.  $K \cap B(0, a)$  est un graphe lipschitzien.* Soit  $a$  un paramètre petit que nous fixerons plus tard. Nous montrons d'abord que pour  $a$  suffisamment petit,  $K \cap B(0, a)$  est un graphe au-dessus

de la droite  $\mathbb{R}\tau(0)$ , que nous supposons pour simplifier orientée par  $e_1$ . Remarquons que pour tout  $x \in K \cap B(0, a)$ ,

$$d_S(\tau(x), e_1) \leq C''(2a)^\alpha, \quad (3.8)$$

ce qui signifie que pour  $a$  petit, toutes les tangentes sont presque horizontales dans  $K \cap B(0, a)$ . Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe deux points  $x, y \in K \cap B(0, a)$  tels que  $x_1 = y_1$ . Posons  $\rho := 10|x - y| = 10|x_2 - y_2| \leq 20a \leq r_0/10$ , et soit  $k$  tel que

$$r_{k+1} \leq \rho \leq r_k.$$

D'après (3.8), nous savons que  $d_S(\tau(x), \tau(y)) \leq 2C''(2a)^\alpha$ . Notons  $T_x := x + \mathbb{R}\tau(x)$ . Puisque  $y \in B(x, r_k)$ , d'après (3.1), nous en déduisons que

$$\text{dist}(y, T_x) \leq \text{dist}(y, L(x, r_k)) \leq Cr_k^{1+\alpha} \leq Ca^\alpha r_k.$$

Nous en déduisons que, pour une constante universelle  $c_0 > 0$ ,

$$|x_2 - y_2| = \text{dist}(y, x + \mathbb{R}e_1) \leq \text{dist}(y, T_x) + c_0 r_k d_S(\tau_x, e_1) \leq a^\alpha (C + c_0 C'' 2^\alpha) r_k \leq a^\alpha C''' |x_2 - y_2|,$$

ce qui est une contradiction pour  $a$  suffisamment petit (dépendant de  $C'''$ ), ce qui prouve que  $K \cap B(0, a)$  doit être un graphe au-dessus du segment  $[-a, a] \times \{0\}$ . Pour prouver maintenant que le graphe est  $10^{-3}$ -Lipschitz pour  $a$  légèrement plus petit, nous pouvons reproduire le même argument mais pour  $x, y \in K \cap B(0, a)$  satisfaisant maintenant, par l'absurde,  $|x_2 - y_2| \leq 10^{-3}|x_1 - y_1|$ . Les détails sont laissés au lecteur.

*Étape 4. Conclusion.* Nous avons démontré que  $K \cap B(0, a)$  est le graphe  $10^{-3}$ -Lipschitz d'une fonction  $f$  sur  $[-a, a]$ . De plus, la droite tangente au graphe de  $f$  en  $(t, f(t))$ , qui existe pour presque tout  $t \in [-a, a]$ , coïncide avec la droite tangente  $x + \mathbb{R}\tau(x)$  à  $K$  au point  $x = (t, f(t))$ . Comme l'application  $x \mapsto \tau(x)$  est  $\alpha$ -Hölderienne, il en découle que l'application  $t \mapsto f'(t)$  coïncide presque partout sur  $[-a, a]$  avec une fonction  $\alpha$ -Hölderienne. Un simple argument de régularisation implique alors que  $f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$  sur  $[-a, a]$ , et  $K \cap B(0, a)$  est donc une courbe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ .  $\square$

### 3.1.1 Régularité des ensembles presque minimaux connexes dans $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , borné, nous désignons par  $\mathcal{K}(\Omega)$  l'ensemble des ensembles compacts connexes  $K \subset \overline{\Omega}$ . Nous notons  $\mathcal{H}^1$  la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle. Une fonction de jauge  $h$  est une fonction croissante  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Définition 3.** On dit que  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  est presque minimal dans  $\Omega$  avec une fonction de jauge  $h$  si, pour toute boule  $B \subset \Omega$  de rayon  $r > 0$  et tout compétiteur  $K' \in \mathcal{K}(\Omega)$  pour  $K$  dans  $B$  (ce qui signifie que  $K = K'$  dans  $\Omega \setminus B$ ), on a :

$$\mathcal{H}^1(K \cap B) \leq \mathcal{H}^1(K' \cap B) + rh(r).$$

**Exemple 1.** Par exemple, la solution du problème de minimisation de Steiner pondéré du Corollaire 2 avec  $\omega$  Lipschitz, est un ensemble presque minimal.

**Remarque 6.** D'après la définition de la presque-minimalité, on voit facilement, en prenant une suite de boules ouvertes  $B(x, r + \varepsilon)$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que si le compétiteur  $K' \in \mathcal{K}(\Omega)$  satisfait  $K = K'$  dans  $\Omega \setminus \overline{B}$ , alors :

$$\mathcal{H}^1(K \cap \overline{B}) \leq \mathcal{H}^1(K' \cap \overline{B}) + rh(r).$$

**Remarque 7** (Alhfors-régularité). Si  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  est presque minimal dans  $\Omega$  avec une fonction de jauge  $h$ , alors pour tout  $r < r_0 := \text{diam}(K)$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega$ , en considérant le compétiteur  $K' := (K \setminus B(x, r)) \cup \partial B(x, r)$ , on obtient la borne supérieure suivante :

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq 2\pi r + h(r)r \leq (2\pi + h(r_0))r.$$

D'autre part, puisque  $K$  est connexe et que  $r < r_0 := \text{diam}(K)$ , on a également la borne inférieure  $\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \geq r$ .

L'objectif principal de cette section est de démontrer le résultat de régularité suivant, dit de  $\varepsilon$ -régularité.

**Théorème 3.2** (Planéité implique régularité). Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble presque minimal dans  $\Omega$  avec une fonction de jauge  $h$  satisfaisant  $h(r) \leq Cr^\alpha$  pour tout  $r > 0$ . Alors,

$$\beta(x, r) + h(r) \leq 10^{-3} \implies K \cap B(x, r/10) \text{ est une courbe régulière } C^{1, \alpha/2}. \quad (3.9)$$

En réalité, le résultat ci-dessus n'est pas le meilleur que l'on puisse obtenir pour des ensembles presque minimaux. Voici l'énoncé optimal, qui implique aussi le Théorème 3.1 :

**Théorème 3.3.** Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble presque minimal dans  $\Omega$  avec une fonction de jauge  $h$  satisfaisant  $h(r) \leq Cr^\alpha$ . Alors  $K$  est une union finie de courbes  $C^{1, \alpha/2}$  qui ne se rencontrent qu'à trois avec des angles de 120 degrés.

Dans la suite, nous donnons une démonstration complète du Théorème 3.2. Nous esquisserons ensuite une preuve du théorème 3.3.

### 3.1.2 L'estimation de la hauteur

**Lemme 7.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe avec pour extrémités  $z = \gamma(0)$  et  $z' = \gamma(1)$ , et dont l'image est notée  $\Gamma := \gamma([0, 1])$ . Alors

$$\text{dist}(y, [z, z'])^2 \leq \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma)(\mathcal{H}^1(\Gamma) - |z' - z|)}{2} \quad \text{pour tout } y \in \Gamma. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Soit  $\bar{y}$  un maximiseur de la fonction  $y \in \Gamma \mapsto \text{dist}(y, [z, z'])$ , c'est-à-dire,  $\bar{y}$  est le point le plus éloigné de  $\Gamma$  au segment  $[z, z']$ , et définissons  $d =: \text{dist}(\bar{y}, [z, z'])$ . Considérons le point  $y' \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(z, z', y')$  forme un triangle isocèle de hauteur  $d$ . Notons  $a =: |z - z'|/2$  et  $L =: |y' - z|$ . D'après le théorème de Pythagore, on a

$$d^2 = L^2 - a^2 = (L - a)(L + a).$$

Ainsi,  $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq |z - \bar{y}| + |\bar{y} - z'| \geq 2L$  et  $\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq |z - z'|$ , ce qui implique

$$d^2 \leq \frac{1}{4} (\mathcal{H}^1(\Gamma) - |z - z'|) (\mathcal{H}^1(\Gamma) + |z - z'|) \leq \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma)(\mathcal{H}^1(\Gamma) - |z - z'|)}{2},$$

ce qui démontre (3.10). □

**Corollaire 3** (Contrôle de la planéité par l'excès). Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble Ahlfors-régulier. Soit  $x \in K$  et  $r > 0$  tels que  $K \cap \bar{B}(x, r)$  soit connexe et  $\sharp(K \cap \partial B(x, r)) = 2$ . En notant  $\{z, z'\}$  ces deux points, s'ils sont « de part et d'autre », alors :

$$\beta_K(x, r)^2 \leq \frac{C}{r} (\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) - |z - z'|).$$

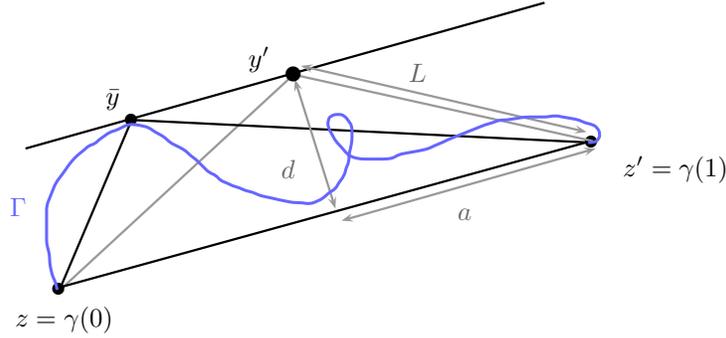


FIGURE 3.1 – L'estimation de la hauteur via l'inégalité de Pythagore.

### 3.1.3 Démonstration du Théorème 3.2

Nous commençons par une borne de densité simple.

**Proposition 4.** *Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble presque minimal avec une fonction de jauge  $h$  et tel que  $\beta(x, r) \leq \frac{1}{10}$ . Alors :*

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq 2r + 10r\beta(x, r) + rh(r).$$

*Démonstration.* Nous notons par  $L(x, r)$  la meilleure droite qui réalise l'infimum dans la définition de  $\beta(x, r)$ , et définissons :

$$W := \{x \in \partial B(x, r) : \text{dist}(x, L(x, r)) \leq r\beta(x, r)\}.$$

On remarque que :

$$\mathcal{H}^1(W) \leq 4r \arcsin(\beta(x, r)) \leq 10r\beta(x, r),$$

car  $\beta(x, r) \leq 1/10$  et  $\arcsin(t) \leq 2$  pour  $t \in [0, 1/10]$ . Nous utilisons alors le compétiteur défini par :

$$K' := (K \setminus B(x, r)) \cup (L(x, r) \cap B(x, r)) \cup W.$$

Il est facile de vérifier que  $K' \in \mathcal{K}(\Omega)$  et, par presque minimalité, on a :

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq \mathcal{H}^1(K' \cap B(x, r)) + rh(r) = 2r + 10r\beta(x, r) + rh(r),$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Un lemme topologique (laissé au lecteur).

**Lemme 8.** *Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ . Si  $\sharp(K \cap \partial B(x, r)) = 2$  et  $K \cap B(x, r)$  n'est pas connexe, alors  $K \setminus B(x, r)$  est connexe.*

**Corollaire 4.** *Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble presque minimal avec une fonction de jauge  $h$ . Supposons que  $h(r_0) \leq 1/2$ . Alors, pour tout  $r \leq \min(r_0, \text{diam}(K))$  et  $x \in K$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega$ , on a :*

1.  $\sharp(K \cap \partial B(x, r)) \geq 2$ ,
2. si  $\sharp(K \cap \partial B(x, r)) = 2$ , alors  $K \cap B(x, r)$  est connexe,
3. si  $\sharp(K \cap \partial B(x, r)) = 2$  et  $\beta(x, r) \leq 1/2$ , alors  $K \cap \partial B(x, r)$  est de part et d'autre.

*Démonstration.* Si  $\#(K \cap \partial B(x, r)) = 0$  ou  $\#(K \cap \partial B(x, r)) = 1$ , alors  $K \setminus B(x, r)$  est connexe, donc  $K \setminus B(x, r)$  est un compétiteur. Mais comme  $x \in K$  et  $r < \text{diam}(K)$ , il en résulte que  $\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \geq r$ . D'un autre côté, comme  $K$  est presque minimal, on a :

$$r \leq \mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq rh(r) \leq \frac{1}{2}r,$$

ce qui constitue une contradiction. Cela prouve (1).

Pour prouver (2), supposons par contradiction que  $K \cap B(x, r)$  n'est pas connexe. Alors, le Lemme 8 implique que  $K \setminus B(x, r)$  est un compétiteur. Ainsi, on retombe dans une contradiction en argumentant de manière similaire à la preuve de (1).

Pour prouver (3), raisonnons par contradiction. Si  $K \cap \partial B(x, r)$  n'est pas « de part et d'autre », alors le compétiteur donné par un petit mur d'un côté entraîne une contradiction.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner l'estimation principale de la planéité, à partir de laquelle la preuve du Théorème 3.2 suit facilement en utilisant également le Lemme 6.

**Proposition 5.** *Soit  $K \in \mathcal{K}(\Omega)$  un ensemble presque minimal avec une fonction de jauge  $h$ . Si*

$$\beta(x, r) + h(r) \leq 10^{-3},$$

*alors*

$$\beta(x, \frac{r}{2}) \leq C\sqrt{h(r)}.$$

*Démonstration.* Nous commençons par appliquer la Proposition 4, qui indique que

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq 2r + 10r\beta(x, r) + rh(r) \leq 2r + 10^{-2}r.$$

Cette estimation, combinée à la formule de la coaire (2.2), nous permet de trouver un rayon  $s \in [\frac{r}{2}, r]$  tel que  $\#K \cap \partial B(x, s) = 2$ . En effet,

$$\int_0^r \#(K \cap \partial B(x_0, t)) dt \leq \mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r)) \leq 2r + 10^{-2}r.$$

Définissons maintenant  $A_2 \subset (0, r)$  par

$$A_2 := \{t \in (0, r); \#(K \cap \partial B(x_0, t)) \neq 2\}.$$

D'après le Corollaire 4, nous savons que  $\#(K \cap \partial B(x_0, t)) > 3$  pour tout  $t \in A_2$ , donc

$$\int_0^r \#(K \cap \partial B(x_0, t)) dt \geq 3|A_2| + 2(r - |A_2|) = |A_2| + 2r,$$

et par conséquent

$$|A_2| \leq 10^{-2}r.$$

Cela signifie qu'il existe un  $s \in [r/2, r]$  tel que  $s \notin A_2$ . En particulier,  $\#(K \cap \partial B(x_0, s)) = 2$  et, par le Corollaire 4, nous savons que  $K \cap B(x_0, s)$  est connexe et que  $\{z, z'\} := K \cap \partial B(x_0, s)$  sont « de part et d'autre ». Nous pouvons alors appliquer le Corollaire 3, qui donne :

$$\beta_K(x, s)^2 \leq \frac{C}{s} (\mathcal{H}^1(K \cap B(x, s)) - |z - z'|).$$

Cependant, le compétiteur  $(K \setminus B(x_0, s)) \cup [z, z']$  est connexe, donc par minimalité, nous obtenons

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, s)) \leq |z - z'| + sh(s).$$

Finalement,

$$\beta_K(x, r/2)^2 \leq 4\beta(x, s)^2 \leq Ch(r).$$

$\square$

## 3.2 Limites par dilatation et minimiseurs globaux

### 3.2.1 Monotonie de la densité

Nous voulons démontrer une monotonie pour le rapport de densité  $r \mapsto \frac{\mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r))}{r}$  lorsque  $K$  est un presque minimiseur. Pour cela, nous devons estimer la dérivée de la fonction

$$\ell(r) := \mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r)).$$

La fonction  $\ell$  est croissante, donc en particulier une fonction de variation bornée (BV). De plus, elle est absolument continue. Essayons de donner des bornes sur sa dérivée. Premièrement, grâce à l'inégalité d'Eilenberg :

$$\int_0^r \# \{ \partial B(x_0, t) \cap E \} dt \leq \mathcal{H}^1(E \cap B(x_0, r)),$$

nous obtenons une première borne :

$$\# \{ \partial B(x_0, t) \cap K \} \leq \ell'(r),$$

pour presque tout  $r$ . Soyons plus précis.

En appliquant la formule de la coaire avec la fonction  $\varphi : x \mapsto |x - x_0|$  et l'ensemble rectifiable  $E \cap B(x_0, r)$ , nous obtenons l'égalité :

$$\int_{E \cap B(x_0, r)} f(x) c(x) d\mathcal{H}^1(x) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\varphi^{-1}(t) \cap E \cap B(x_0, r)} f(x) d\mathcal{H}^0 \right) dt,$$

où  $c(x)$  est le facteur de coaire, qui ici est donné par

$$c(x) = \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \tau(x) \right|,$$

avec  $\tau(x)$  un vecteur tangent unitaire à  $K$  au point  $x$ , qui existe  $\mathcal{H}^1$  presque partout. En d'autres termes,  $c(x)$  est le cosinus de l'angle entre le vecteur tangent à  $K$  en  $x$  et la direction normale à  $K$  en  $x$ . En notant cet angle  $\theta(x)$ , nous avons démontré l'inégalité suivante :

$$\int_{E \cap B(x_0, r_2) \setminus B(x_0, r_1)} |\cos(\theta(x))| d\mathcal{H}^1(x) = \int_{r_1}^{r_2} \# \{ \partial B(x_0, t) \cap E \} dt.$$

Définissons maintenant la mesure

$$\nu := \cos(\theta(x)) \mathcal{H}^1|_E$$

et posons  $f(r) := \nu(E \cap B(x_0, r))$ . À partir de ce qui précède, nous trouvons que :

$$\# \{ \partial B(x_0, t) \cap K \} \leq f'(r) \leq \ell'(r). \quad (3.11)$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant de monotonie.

**Proposition 6.** *Supposons que  $K$  est un ensemble presque minimal dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avec fonction de jauge  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Alors pour tout  $x_0 \in K$  et  $r \in (0, \min(\text{diam}(K), \text{dist}(x_0, \partial\Omega)))$ , la fonction*

$$d(r) := \frac{\mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r))}{r} + \int_0^r \frac{h(t)}{t} dt$$

*est croissante. De plus si  $h = 0$  et  $d(r)$  est constante, alors  $K$  est un cône.*

*Démonstration.* Nous savons que  $\# \{ \partial B(x_0, t) \cap K \} < +\infty$  pour presque tous les  $r$  au sens de  $\mathcal{H}^1$ . Nous choisissons donc un tel rayon  $r$  et comparons  $K$  dans  $B(x_0, r)$  avec le compétiteur constitué de l'union des segments joignant  $x_0$  à chaque point de  $K$  sur le cercle, à savoir,

$$K' := (K \setminus B(x_0, r)) \cup \bigcup_{x \in \partial B(x_0, r)} [x_0, x].$$

Comparer  $K$  avec  $K'$  donne

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r)) \leq \mathcal{H}^1(K' \cap B(x_0, r)) + rh(r) \leq r \# \{ \partial B(x_0, r) \cap K \} + rh(r).$$

En utilisant maintenant (3.11), nous obtenons :

$$\ell(r) \leq r \# \{ \partial B(x_0, r) \cap K \} + rh(r) \leq rf'(r) + rh(r) \leq r\ell'(r) + rh(r), \quad (3.12)$$

d'où nous concluons la monotonie de  $d(r)$ .

Maintenant, en supposant que  $h = 0$  et que  $\frac{\ell(r)}{r}$  est constant, nous déduisons que les inégalités ci-dessus dans (3.12) doivent toutes être des égalités (avec  $h = 0$ ). En particulier,  $\cos(\theta(x)) = 1$  pour tout  $x$ , ce qui montre que  $K$  doit être un cône. Cela termine la démonstration de la proposition.  $\square$

### 3.2.2 Classification des limites par dilatation des ensembles presque minimaux 1D

Nous sommes maintenant prêts à classer les limites possibles des dilatations d'un ensemble presque minimal plan de dimension 1. D'abord, nous observons que, en raison du comportement monotone de la densité, nous savons que la limite suivante existe pour tout  $x_0 \in K$  :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(K \cap B(x_0, r))}{r} = \ell_0.$$

Soit  $r_n \rightarrow 0$  et posons

$$K_n := \frac{1}{r_n}(K - x_0).$$

L'ensemble  $K_n$  est presque minimal dans  $\frac{1}{r_n}(\Omega - x_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , avec la fonction de jauge  $h(r_n \cdot)$  (qui converge vers zéro). Il peut être prouvé que  $K_n$  converge (dans un sens Hausdorff local) vers un certain ensemble  $K_0 \subset \mathbb{R}^2$  qui satisfait les faits suivants :

- $K_0$  est un ensemble presque minimal dans  $\mathbb{R}^2$  (c'est-à-dire avec  $h = 0$ ),
- $r \mapsto \frac{\mathcal{H}^1(K_0 \cap B(0, r))}{r}$  est constant, égal à  $\ell_0$ ,
- $K_0$  est un cône, car la preuve de la monotonie montre que  $d' = 0$ , donc  $\frac{1}{c(x)} = 1$  pour tout  $x$ ,
- Nous en déduisons que  $K_0$  est entièrement caractérisé par son intersection avec  $\partial B(0, 1)$ , et doit être soit une droite, soit trois demi-droites formant un angle de 120 degrés. En effet, l'intersection ne peut avoir que deux points, à moins qu'ils ne soient exactement sur un diamètre (sinon, nous pouvons facilement construire un meilleur compétiteur), et elle ne peut pas avoir plus de trois points, car il existe toujours au moins deux points formant un angle inférieur à 120 degrés, ce qui signifie qu'un meilleur compétiteur est possible.

### 3.3 Démonstration du théorème 3.1

On peut maintenant donner une esquisse de preuve pour le théorème 3.1. Pour cela on utilise pour la monotonie de la densité en chaque point pour classer l'ensemble des points  $x_0$  de  $K$ . Si la densité limite (c'est à dire la limite lorsque  $r \rightarrow 0$  de  $\frac{1}{2r}\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r))$ ) est égale à 1 (ce qui est vrai en presque tout point par rectifiabilité de  $K$ ), alors  $K$  est localement  $C^1$  autour de  $x_0$  grâce au théorème 3.2 et le lemme 7. Sinon, la densité ne peut valoir que  $3/2$ , ce qui arrive si  $x_0$  est un point triple. Il n'y a pas d'autre densité limite possible puisque ce sont les seules densités possibles des cônes minimaux (en réalité il faudrait aussi considérer ce qu'il se passe au bord, sur les "points d'attache"  $x_k$  mais par soucis de simplicité on considère uniquement la régularité intérieure ici). Il suffit donc de montrer qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points  $x_0$  où la densité vaut  $3/2$ . Pour cela on peut faire un argument par l'absurde : en supposant qu'il y a une suite  $x_k$  de points à densité  $3/2$  qui s'accumulent en un point  $x_0$  donné, alors on peut considérer une limite par dilatation d'un facteur bien choisi qui dépend en particulier de  $|x_k - x_{k+1}|$  qui convergerait vers un cône minimal qui aurait une densité strictement intermédiaire entre  $3/2$  et 1, ce qui n'est pas possible. Ainsi s'achève la description de preuve pour le théorème 3.1.

# Bibliographie

- [1] Giovanni Alberti and Martino Ottolini. On the structure of continua with finite length and Golał's semicontinuity theorem. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 153 :35–55, 2017.
- [2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] Guy David. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, volume 233 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [4] Thierry De Pauw, Antoine Lemenant, and Vincent Millot. On sets minimizing their weighted length in uniformly convex separable Banach spaces. *Adv. Math.*, 305 :1268–1319, 2017.
- [5] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.*, volume 44 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, 1st paperback ed. edition, 1999.
- [6] Hervé Pajot and Emmanuel Russ. *Analyse dans les espaces métriques*. Savoirs Actuels. Les Ulis : EDP Sciences ; Paris : CNRS Éditions, 2018.
- [7] Filippo Santambrogio. *A course in the calculus of variations. Optimization, regularity, and modeling*. Universitext. Cham : Springer, 2023.